

Un lemme de Morse pour les surfaces convexes

François LABOURIE *

1^{er} février 2008

1 Introduction

Le lemme de Morse pour les géodésiques affirme que dans une variété à courbure strictement négative et géométrie bornée, toute quasi-géodésique est à une distance bornée d'une géodésique.

D'un point de vue dynamique, il est une version géométrique du "Shadowing Lemma". Il a pour conséquence les trois propriétés hyperboliques du flot géodésique d'une variété compacte à courbure strictement négative, vu ici un feuilletage de dimension 1 :

- (i) l'ensemble des feuilles compactes est dense,
- (ii) une feuille générique est dense,
- (iii) les flots géodésiques de deux variétés à courbure négative proches sont conjugués.

Le but de notre d'article est d'énoncer un lemme de Morse pour les k -surfaces dans les variétés de dimension 3 à courbure négative et d'en tirer des conséquences analogues.

Définissons brièvement une k -surface, où $k \in]0, 1[$, dans une variété M de dimension 3 à courbure plus petite que -1 : il s'agit d'une surface dont la *courbure extrinsèque*, c'est-à-dire le produit des courbures principales, vaut k . Nos hypothèses sur k entraînent qu'une k -surface est localement convexe et à courbure intrinsèque strictement négative. Nous nous intéresserons principalement aux k -surfaces non

*l'auteur remercie l'Institut Universitaire de France

compactes (elles le sont toutes si M est simplement connexe) et complètes dans un certain sens (voir 2.2 pour des précisions). Du point de vue analytique, il s'agit d'un problème elliptique, que nous décrivons comme de Monge-Ampère au sens de [3].

Le lemme de Morse pour les surfaces convexes nous dit en particulier que toute surface localement convexe à courbure extrinsèque plus grande que k , ayant de bonnes propriétés à l'infini, est à distance bornée d'une k -surface. Il résoud en particulier une sorte de problème de Plateau pour les k -surfaces. Malheureusement, pour énoncer correctement ce lemme, il nous faut introduire des définitions techniques qui sortent du cadre de cette présentation (voir 2).

Nous allons présenter maintenant deux types d'application de ce lemme de Morse. Nous étudierons les problèmes de Plateau asymptotiques et les propriétés hyperboliques de l'espace des k -surfaces. Ces propriétés hyperboliques, qui font apparaître l'espace des k -surfaces comme une généralisation du flot géodésique, sont la motivation essentielle de notre travail.

Pour énoncer de façon simple nos résultats, nous supposerons dans cette introduction que M est le revêtement universel d'une variété N compacte.

1.1 Problème de Plateau asymptotique

Soit i un homéomorphisme local d'une surface S dans le bord à l'infini, $\partial_\infty M$, de M . Une *solution* du problème de Plateau asymptotique défini par (i, S) , est une immersion f de S dans M dont l'image est une k -surface et telle que i est l'application qui à un point de S associe l'extrémité à l'infini de la normale extérieure à $f(S)$ en ce point.

La terminologie se justifie par le fait que lorsque i est un plongement du disque ouvert qui s'étend à un plongement du disque fermé, alors on a envie de penser que le bord à l'infini de la solution coïncide avec le bord du disque. Elle peut-être aussi source de confusion car en général une solution d'un problème asymptotique n'a pas de bord à l'infini en un sens raisonnable.

Nous démontrons une série de résultats sur ce problème de Plateau asymptotique.

Théorème A. *Il existe au plus une solution du problème de Plateau asymptotique.*

Le problème de Plateau asymptotique n'a pas toujours de solutions :

Théorème B. *Si S est $\partial_\infty M$ auquel on a ôté 0, 1, ou 2 points et si i est l'injection canonique, alors le problème (i, S) n'a pas de solutions.*

Nous avons les résultats d'existence suivants :

Théorème C. *Si (i, S) est un problème de Plateau asymptotique et si $\partial_\infty M \setminus i(S)$ contient au moins trois points distincts, alors (i, S) admet une solution.*

Théorème D. *Si Γ est un groupe agissant sur S , tel que S/Γ soit une surface compacte de genre plus grand ou égal à 2, si ρ est une représentation de Γ dans le groupe des isométries de M , et i vérifie*

$$\forall \gamma \in \Gamma, \quad i \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ i,$$

alors le problème (i, S) a une solution.

Enfin

Théorème E. *Si (i, U) est un problème de Plateau asymptotique et si S est un ouvert relativement compact de U alors (i, S) admet une solution.*

On peut remarquer à ce stade une analogie entre les données de problèmes de Plateau asymptotiques ayant des solutions, et les immersions hyperboliques du disque dans \mathbb{CP}^1 .

Nous avons démontré dans [4] le théorème D dans le cas où la variété ambiante était à courbure constante. Toujours dans le cas de la courbure ambiante constante, mais en toutes dimensions, J. Spruck et H. Rosenberg ont démontré des versions partielles de nos résultats : ils ont montré que le problème de Plateau défini par (i, U) avait une solution dans le cas où U était l'intérieur du disque fermé D et où i s'étendait en un plongement de D dans U [5]. Les autres résultats de cet article sont des cas particuliers, toujours dans le cadre de la courbure ambiante constante (mais en toutes dimensions), de 5.0.3 : les auteurs ne considèrent que les graphes au dessus d'une horosphère. Ceci leur permet d'écrire explicitement les équations satisfaites par la fonction dont une telle surface est le graphe, équations qui, grâce à l'hypothèse de courbure ambiante constante, sont d'une forme simple à laquelle peuvent s'appliquer les estimées *a priori*, classiques pour les équations de Monge-Ampère. Quant à nous, nous appliquons les techniques plus flexibles de courbes pseudo-holomorphes mises au point dans [3]. Ceci nous permet de sortir du cadre de la courbure constant, et de considérer des surfaces qui ne sont pas des graphes au dessus des horosphères.

1.2 Propriétés hyperboliques de l'espace des k -surfaces

Nous voulons poursuivre notre analogie avec les géodésiques plus loin. Soit maintenant N une variété de dimension 3 compacte. Le fibré unitaire de N est l'espace des géodésiques pointées, c'est-à-dire des paires (γ, x) où x est un point de la géodésique γ . Le flot géodésique correspond alors au feuilletage de dimension 1 obtenu en faisant bouger le point le long d'une géodésique donnée.

Définissons donc les k -surfaces pointées, comme les paires (S, x) où x est un point sur la k -surface S . Nous attirons encore une fois l'attention sur le fait qu'il s'agit de surfaces en général non compactes et ayant même beaucoup de récurrence. Nous définissons également les tubes pointés comme les paires (T, x) , où T est une géodésique et x est un vecteur normal unitaire à T .

Dans [3], dans le cadre plus général des problèmes de Monge-Ampère, nous avons montré l'espace \mathcal{N} , constitué des k -surfaces pointées et des tubes pointés, est compact, et possède de plus une structure de lamination définie par la condition : deux points (F, x) et (G, y) sont sur la même feuille si $F = G$.

Par abus de langage, nous appellerons \mathcal{N} l'espace des k -surfaces de N .

Nous donnerons plus de précisions sur la topologie sous-jacente dans 8 et renvoyons surtout à [3].

Le résultat essentiel de notre article est le théorème suivant qui montre que l'espace \mathcal{N} est une bonne généralisation du flot géodésique, car il en possède les propriétés hyperboliques.

Théorème F. *Soit \mathcal{N} l'espace des k -surfaces d'une variété compacte N munie d'une métrique g à courbure plus petite que -1 , alors*

- (i) *pour tout entier g , l'ensemble des feuilles compactes de genre plus grand que g est dense dans \mathcal{N} ,*
- (ii) *une feuille générique est dense dans \mathcal{N} ,*
- (iii) *enfin \mathcal{N} est stable dans le sens suivant, si h est une métrique suffisamment proche de g , et si $\tilde{\mathcal{N}}$ est l'espace des k -surfaces pour la métrique h , alors il existe un homéomorphisme entre \mathcal{N} et $\tilde{\mathcal{N}}$ envoyant feuille sur feuille*

L'espace des k -surfaces contient l'espace des tubes pointés, espace qui fibre au-dessus du flot géodésique. En ce sens, l'espace des k -surfaces "contient le flot géodésique". Dans le cas, où la courbure ambiante est constante, il contient également l'espace des plans totalement géodésiques \mathcal{P} : les surfaces équidistantes des plans totalement géodésiques sont à courbure constante. Notre espace \mathcal{N} de dimension infinie est cependant beaucoup plus gros.

Signalons ici à titre de comparaison quelques propriétés de l'espace \mathcal{P} des plans totalement géodésiques toujours dans le cas de la courbure ambiante constante. Tout d'abord, par le théorème d'ergodicité de Moore, une feuille générique est dense. En ce qui concerne les feuilles compactes, il est connu que pour certaines variétés arithmétiques \mathcal{P} ne contient aucune feuilles compactes, pour d'autres il en contient un ensemble dense.

Cet espace \mathcal{P} des plans totalement géodésiques, n'a bien sûr pas beaucoup d'intérêt quand la courbure n'est pas constante, mais il possède une sorte de propriété de "stabilité" démontrée par M. Gromov [2] : si une métrique h sur une variété N est suffisamment proche d'une métrique g à courbure constante, alors il existe une application continue de \mathcal{P} , l'espace des plans totalement géodésiques pour g , dans N telle que les images des feuilles soient des surfaces minimales.

La situation décrite par le théorème F amène à se poser un certain nombre de questions :

(i) on a une abondance de mesures transverses invariantes, mais y en a-t-il une qui charge tous les ouverts ?

(ii) Quelle est la statistique des feuilles compactes ? On peut associer à chaque k -surface l'intégrale de sa courbure moyenne, pour de bonnes raisons nous appellerons ceci *l'aire* de la k -surface. De manière naturelle, l'aire des tubes est alors la longueur de la géodésique sous-jacente (à 2π près). On peut alors montrer (ce n'est pas fait dans cet article) qu'il n'y a qu'un nombre fini $N(A)$ de feuilles compactes d'aire bornée par A . Notons $N(A, g)$ le nombre de celles-ci qui sont de genre g . On a envie de poser

$$ent_g(N) = \liminf_{h \leq g, A \rightarrow \infty} \frac{\log(N(A, g))}{A}.$$

Le nombre ent_0 est l'entropie du flot géodésique, quelles sont les valeurs de ent_g ?

(iii) Les feuilles compactes sont-elles équidistribuées ?

(iv) On peut également se poser une question qui est l'analogue de la question de conjugaison pour les flots géodésiques : pour deux métriques proches, supposons que l'homéomorphisme de conjugaison puisse être choisi conforme sur chacune des feuilles, les métriques sont-elles isométriques ?

1.3 Structure de l'article

2- Définitions, énoncé du lemme de Morse. Nous énonçons le lemme de Morse, ainsi que les définitions nécessaires. Cette section contient également des définitions utilisées de manière récurrente dans l'article ainsi que quelques propriétés préliminaires.

3 - Variations infinitésimales et déformations. Nous y démontrons le lemme 5.3.1 qui décrit les variations infinitésimales de k -surfaces à bord.

4- Théorème de compacité. Nous y étudions les limites de k -surfaces. Cette section débute par un rappel des résultats de compacité sur les problèmes de Monge-Ampère démontrés dans [3].

- 5 - Problème de Plateau pour les disques.** Nous y démontrons la proposition 5.0.3 qui est une version faible du lemme de Morse.
- 6- Démonstration du lemme de Morse pour les surfaces convexes.** Nous démontrons l'existence et l'unicité, en utilisant une méthode de déformation.
- 7- Problèmes asymptotiques.** Nous y démontrons les théorèmes énoncés dans l'introduction. Nous traitons le théorème A en 7.2.1 ; les théorèmes C,D et E sont vus en 7.3.3, 7.3.1 et 7.3.2 respectivement, et enfin B est démontré en 7.4.1.
- 8- Espace des k -surfaces.** A partir de cette section, nous nous intéressons à l'espace des k -surfaces (sans bord) d'une variété compacte. Cet espace est introduit en 5.3.1.
- 9- Densité des feuilles périodiques.** Il s'agit de F-(i). La démonstration est la plus délicate de cet article.
- 10-Généricité des feuilles denses.** Nous y démontrons F-(ii).
- 11-Stabilité.** Cette section contient la preuve de F-(iii).

2 Définitions

Dans cette section, nous allons présenter les définitions utilisées dans l'énoncé du lemme de Morse. Nous donnerons également quelques définitions connexes utilisées dans les preuves, ainsi que quelques résultats préliminaires.

Enonçons tout le suite le lemme de Morse qui sera démontré en 6.0.2

Lemme de Morse. *Soit M une variété d'Hadamard à géométrie bornée et à courbure strictement plus petite que $-c < 0$. Soit S une surface localement convexe, éventuellement à bord, à courbure plus grande que c , à géométrie bornée et qui n'est ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire, ni compacte sans bord. Alors, pour tout $k \in]0, c[$, il existe une unique k -surface lentille pour S .*

De plus, si S n'est pas tubulaire à l'infini, cette k -surface a sa courbure moyenne uniformément bornée et en particulier n'est pas dégénérée

Les termes de ce lemme vont être expliqués dans cette section.

Nous parlerons des k -surfaces dégénérées et non dégénérées dans le paragraphe 2.2. Nous définirons les surfaces lentilles en 2.2.2 et nous aurons besoin de 2.2.1 pour cela. Le paragraphe sur la géométrie bornée 2.3 est nécessaire pour donner la définition 2.4 de tubulaire, horosphérique à l'infini *etc*

Cette section contient également des résultats souvent utilisés cet article.

2.1 k -surfaces

Si S est une surface convexe immergée dans une variété de dimension 3 M , nous noterons $n(S)$ son *relevé de Gauss*, c'est-à-dire la surface immergée dans le fibré unitaire UM de M constituée des vecteurs normaux extérieurs à S .

Une k -surface est une surface (éventuellement à bord) immergée dans M dont le produit des courbures principales vaut k , et telle que la métrique induite de $n(S)$ soit complète. Attention, ceci n'entraîne pas *a priori* que la métrique induite de celle de M est complète. Si tel est le cas, la surface est *non dégénérée*, et *dégénérée* dans le cas contraire. Si la courbure moyenne est bornée, alors la k -surface est non dégénérée.

2.2 Normal étendu, surfaces lentilles, bout

2.2.1 Normal étendu, bout

Soit S une surface localement convexe immergée à bord ∂S dans M . Soit n son champ de vecteur normal extérieur et n_∂ le champ de vecteur normal intérieur à ∂S dans S . Posons

$$N_\partial^+ = \{u \in (T\partial S)^\perp / \langle u, n_\partial \rangle \leq 0\}.$$

Le *normal étendu* de S est le sous-ensemble N_S de UM , défini par

$$N_S = n(S) \cup N_\partial^+.$$

Dans la suite, nous identifierons souvent abusivement $n(S)$ (vu comme sous-ensemble de UM) et S . Il est facile de voir que N_S est une sous-variété C^0 -immergée dans UM dont le bord ∂N_S est l'ensemble de vecteurs normaux intérieurs à S le long de ∂S .

Le *bout* B de S sera la variété de dimension 3, homéomorphe à $N_S \times]0, +\infty[$ et muni de la métrique induite par l'application

$$\begin{cases} N_S \times]0, +\infty[\rightarrow M \\ (t, n) \mapsto \exp(tn) \end{cases}$$

D'un point de vue métrique, on complète le bout en ajoutant S , on parlera alors d'un bout complet.

2.2.2 Graphe étendu, surface lentille, champ focal, pied, fonctions inverses

Une surface Σ localement convexe immergée à bord $\partial\Sigma$ est un *graphe étendu* au-dessus de S s'il existe

- un ouvert U de $\text{int}(N_S) = N_S \setminus \partial N_S$, vérifiant

$$n(\bar{S}) \subset U \subset \bar{U} \subset \text{int}(N_S)$$

où \bar{A} désigne l'adhérence de A dans N_S ,

- une fonction f continue définie sur \bar{U} , strictement positive sur U ,

tels que

- (i) $\forall y \in \bar{U} \setminus U, \quad f(y) = 0,$
- (ii) $\Sigma = \{\exp(f(u)u) \mid u \in U\},$
- (iii) le segment géodésique $\exp([f(u), +\infty[u)$ est extérieur à Σ .

Enfin, si Σ est le graphe étendu pour une fonction f au-dessus de S , nous dirons que Σ est un graphe étendu *borné* au-dessus de S si f est bornée et de manière symétrique que S est *lentille* pour Σ , et nous appellerons f la *fonction associée*.

Le *champ de vecteur focal* pour un graphe étendu Σ au-dessus de S sera le champ de vecteur

$$U : \exp(f(u)u) \mapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=f(u)} \exp(tu).$$

Enfin si Σ est un graphe étendu au-dessus de S , le *pied* d'un point $y = \exp(f(u)u)$ de Σ sera le point $x = \pi(u)$ de S , où π est la projection du fibré unitaire de M sur M .

2.2.3 Remarques

- (i) L'ouvert U de la définition d'un graphe étendu contenant l'adhérence de $n(S)$ et f étant strictement positive, $\nu(s) \neq n(s)$ pour tous les points s de ∂S , où ν est le champ de vecteur normal extérieur à Σ .
- (ii) Soit Σ est un graphe étendu au-dessus de S . Si ν est le champ de vecteur normal extérieur à Σ alors $\nu(\partial S) \subset \text{int}(N_S)$. En effet, d'après 2.2.2 (iii), le vecteur n_{∂} pointe vers l'intérieur de Σ , c'est-à-dire, si s est un point de $\partial S = \partial\Sigma$, nous avons

$$\langle n_{\partial}(s), \nu(s) \rangle \leq 0.$$

Ensuite, $\nu(s)$ étant perpendiculaire à $T(\partial S)$ appartient au plan engendré par $n_{\partial}(s)$ et $n(s)$. En particulier, si $\nu(s) \notin \text{int}(N_S)$, nous avons nécessairement $\nu(s) = -n(s)$, mais ceci est impossible : deux surfaces strictement convexes ayant un point d'intersection et en ce point deux normales opposées sont telles que, au moins localement, leur intersection est réduite à ce point.

- (iii) Un graphe étendu Σ au-dessus de S , se plonge naturellement dans le bout complet de S de telle sorte que $\partial\Sigma \subset \partial S$.

2.2.4 Fonction inverse

Introduisons une dernière notion utile. Si S est une surface lentille pour Σ de fonction associée λ , la *fonction inverse* est la fonction μ définie sur Σ par

$$\mu(\exp(\lambda(u)u)) = \lambda(u).$$

Nous avons alors le

Lemme 2.2.1 *Toute fonction inverse est 2-lipschitzienne*

Preuve notons μ la fonction inverse. Soient u et v deux éléments de N_S . En notant $x = \pi(u)$ et $y = \pi(v)$, où π est la projection de UM sur M , d_{Σ} la distance riemannienne intrinsèque de Σ , nous avons par convexité locale de S et grâce à notre hypothèse de courbure négative

$$d(x, y) \leq d_{\Sigma}(\exp(\lambda(u)u), \exp(\lambda(v)v)).$$

Enfin comme

$$|\lambda(u) - \lambda(v)| \leq d(x, y) + d_{\Sigma}(\exp(\lambda(u)u), \exp(\lambda(v)v)),$$

Nous en déduisons bien le résultat. \diamond

2.2.5 Déformations

Grâce à la remarque 2.2.3 (i), nous avons le lemme évident de déformation suivant

Lemme 2.2.2 *Soit S_t , $t \in [0, 1]$ une famille de surfaces immergées localement convexe, compactes à bord. Soit Σ_t une autre famille de surfaces compactes, localement convexes, immergées et telle que $\partial S_t = \partial \Sigma_t$. Alors, si Σ_0 est lentille pour S_0 alors Σ_t est lentille pour S_t pour tout t dans un voisinage de 0.*

2.3 Géométrie bornée

Rappelons quelques définitions.

2.3.1 Convergence de variétés pointées

Une *variété pointée* est une paire (M, x) où M est une variété et x un point de M . Nous dirons que la suite de variétés pointées $\{(M_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ équipées des métriques g_n converge C^∞ sur tout compact vers la variété riemannienne (M_∞, x_∞) équipée de la métrique g_∞ s'il existe une suite d'applications $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (pas nécessairement continues) définies de M_∞ dans M_n , envoyant x_∞ dans x_n telle que pour tout R , alors

- (i) pour n suffisamment grand, la restriction de f_n à la boule de rayon R et de centre x_∞ est C^∞ et injective
- (ii) $f_n^* g_n$ converge C^∞ sur tout compact vers g_∞ .

Nous dirons qu'une variété M est à *géométrie bornée* si pour toute suite de points $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M , la suite de variétés pointées $\{(M, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente.

Par abus de langage, nous dirons qu'une variété M d'Hadamard est à *géométrie bornée* si quelque soit la suite de points $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de M , la suite de variétés pointées $\{(M, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente vers une variété à courbure strictement négative.

2.3.2 Remarques

- (i) Une variété de Hadamard ayant un groupe discret cocompact d'isométries est à géométrie bornée.
- (ii) Si une variété de Hadamard à courbure négative est à géométrie bornée, alors la croissance des horosphères est polynomiale. Remarquons en effet tout d'abord que la courbure reste coincée entre deux bornes strictement négatives. Le flot géodésique de M va donc être d'Anosov. De plus, par géométrie bornée le volume des boules de rayon 1 sur les horosphères va être uniformément borné. L'argument classique montrant la croissance polynomiale des variétés stables d'un flot d'Anosov nous fournit le résultat.

2.3.3 Convergence de sous-variétés immergées

Nous nous intéresserons aux *variétés immergées pointées*, c'est-à-dire aux quadruplets de la forme $Q = (N, x, f, M)$ où x est un point d'une variété N , f une immersion de N dans une variété riemannienne M . Nous dirons qu'une suite de variétés immergées $\{Q_n = (N_n, x_n, f_n, M_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge C^∞ sur tout compact vers une variété immergée $Q_\infty = (N_\infty, x_\infty, f_\infty, M_\infty)$ si

- (i) La suite de variétés pointées $\{(M_n, f_n(x_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la variété pointée $(M_\infty, f_\infty(x_\infty))$
- (ii) La suite de variétés pointées $\{(N_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, où N_n est munie de la métrique induite par f_n , converge vers $\{(N_\infty, x_\infty)\}$, où N_∞ est munie de la métrique induite par f_∞ .
- (ii) $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f_∞ sur tout compact au sens où on l'imagine.

Enfin, une variété immergée (N, x, f, M) sera dite à *géométrie bornée* si pour toute suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $\{(N, x_n, f, M)\}_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Plus généralement nous dirons qu'une suite de variétés immergées

$$\{(N_n, x_n, f_n, M_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

est à *géométrie bornée* si pour toute suite de points $\{y_n \in N_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, la suite

$$\{(N_n, y_n, f_n, M_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

possède une sous-suite convergente.

Lorsque la variété ambiante M est sous-entendue, nous abrévions souvent le quadruplet (N, x, f, M) décrivant une variété immergée, en une paire (N, x) et en confondant ainsi de manière abusive N et son image.

2.4 Surfaces horosphériques, surface tubulaires

Dans ce paragraphe, M sera toujours une variété simplement connexe de dimension 3 à courbure strictement négative et à géométrie bornée.

2.4.1 Surfaces horosphériques, pseudo-horosphères

Par définition, une surface *horosphérique* sera une surface convexe complète plongée Σ , pour laquelle il existe une fonction de Busemann h vérifiant les deux conditions suivantes

- (i) h est majorée sur Σ ,
- (ii) le gradient de h est partout transverse à Σ .

Une suite de surfaces immergées $\{(S_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sera dite *de type horosphérique* s'il existe une suite de points $\{y_n \in S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\{(S_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite qui converge vers une surface horosphérique.

Une surface immergée (Σ, x) sera dite *horosphérique à l'infini* s'il existe une suite de points $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ telle que $\{(\Sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une surface horosphérique.

Nous dirons qu'une surface convexe complète plongée S dans M est une *pseudo-horosphère* si l'application de Gauss-Minkowski définie de S dans $\partial_\infty M$ par,

$$x \mapsto \exp(+\infty n(x))$$

où n est le champ de vecteur normal extérieur, est une bijection sur $\partial_\infty M$ privé d'un point.

Une surface horosphérique est une pseudo-horosphère et réciproquement nous avons le

Lemme 2.4.1 *Dans une variété à géométrie bornée une pseudo-horosphère à géométrie bornée est horosphérique à l'infini*

Preuve :soit $y \in \partial_\infty M$ le point évité par l'application de Gauss-Minkowski de la pseudo-horosphère S . Soit B l'ensemble convexe bordé par S . Construisons une suite de convexes $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ayant les propriétés suivantes

- (i) $\partial_\infty C_n$ est un voisinage de y ,
- (ii) $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Hausdorff dans le compactifié de M vers y .

Soit maintenant d_n la fonction distance à $C_n \cap B$. D'après (i) sur S , d_n atteint son maximum en un point x_n . D'après (ii), $d_n(x_n)$ tend vers $+\infty$.

Considérons la suite de surfaces immergées $\{(S, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ immergées dans la suite $\{(M, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Par nos hypothèses, $\{(S, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ va converger vers une surface (S_∞, x_∞) immergée dans une variété (M_∞, x_∞) . Enfin la suite de fonctions $d_n - d_n(x_n)$ va converger vers une fonction de Buseman sur M_∞ , majorée sur S et dont le gradient est dirigé vers l'extérieur de S_∞ . La surface S_∞ est donc de type horosphérique, et S est donc bien horosphérique à l'infini. \diamond

2.4.2 Surfaces tubulaires, tubes

Par définition, une surface *tubulaire* sera une surface localement convexe complète plongée Σ , pour laquelle il existe une géodésique telle que si d est la fonction distance à cette géodésique, d vérifie les deux conditions suivantes

- (i) d est bornée sur Σ ,
- (ii) le gradient u de d est dirigé vers l'extérieur de Σ , c'est-à-dire $\langle u, n \rangle \geq 0$, où n est le champ de vecteur normal extérieur.

Il est intéressant de remarquer que la surface étant convexe, et les lignes de gradient de d étant des géodésiques, la condition (iii) est équivalente à la condition où on impose $\langle u, n \rangle > 0$.

Une suite de surface immergée sera dite *de type tubulaire* si elle possède une sous-suite qui converge vers une surface tubulaire.

Une surface immergée (Σ, x) sera dite *tubulaire à l'infini* s'il existe une suite de points $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ telle que $\{(\Sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une surface tubulaire.

Enfin une définition connexe nous sera souvent utile par la suite : le *tube d'une géodésique* γ est défini par

$$N(\gamma) = \{u \in UM / \langle u, \dot{\gamma} \rangle = 0\}.$$

2.4.3 Remarque

Il est utile de remarquer qu'être de type horosphérique, tubulaire, horosphérique ou tubulaire à l'infini est une propriété qui ne dépend que de $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et S réciproquement et ne fait pas intervenir les points choisis sur ces surfaces

2.5 Principe du maximum géométrique et applications

Nous avons l'énoncé évident suivant que nous appellerons du nom pompeux de *principe du maximum géométrique*.

Lemme 2.5.1 *Soit S_1 et S_2 deux surfaces convexes tangentes en un point x et telle que S_1 est à l'intérieur de S_2 au voisinage de x , alors $k_1(x) \geq k_2(x)$, où k_i désigne la courbure extrinsèque de S_i .*

Nous allons en tirer quelques conséquences. Pour cela supposons que la courbure de M est plus petite que $-c < 0$ et soit k tel $0 < k < c$. Nous avons

Proposition 2.5.2 *Si S est une k -surface compacte telle que ∂S est inclus dans une boule B , alors S toute entière est incluse dans cette boule.*

Preuve : en effet avec nos hypothèses, toute sphère a une courbure plus grande que c .

Rappelons en rapidement la démonstration en utilisant 3.1.1 : si nous notons λ_i^r les valeurs propres de l'opérateur deuxième forme fondamentale de la sphère de rayon r , S^r , associées aux vecteurs propres e_i^r , ainsi que k_i^r les courbures sectionnelles des plans perpendiculaires à S^r passant par e^i , d'après 3.2.1, la courbure κ_r de la sphère de rayon r vérifie l'équation

$$\frac{d\kappa_r}{dr} = -\kappa_r(\lambda_2^r(1 + \frac{k_1^r}{\kappa_r}) + \lambda_1^r(1 + \frac{k_2^r}{\kappa_r}))$$

La propriété annoncée découle immédiatement de l'inégalité :

$$\frac{d\kappa_r}{dr} \geq (\kappa_r - c)(-\lambda_1^r - \lambda_2^r).$$

Nous pouvons conclure par l'absurde maintenant. Si S n'est pas incluse dans B , on peut construire une sphère à laquelle S est tangente intérieurement ce qui contredit notre principe du maximum. \diamond

Le même raisonnement montre

Proposition 2.5.3 *Une k -surface ne peut-être horosphérique.*

2.6 Domination

Soit S une surface lentille pour Σ , de fonction associée f définie sur l'adhérence d'un ouvert U du normal étendu N_S à S . Nous dirons que S domine la surface S_1 , s'il existe un ouvert V de U tel que $\bar{V} \subset U$, où \bar{V} est l'adhérence de V dans N_S , une fonction positive ou nulle g définie sur \bar{V} , inférieure ou égale à f sur V et égale à f sur $\bar{V} \setminus V$, telle que S_1 est le graphe de g sur V . Dans le cas où la fonction g est strictement positive, nous dirons que S domine strictement la surface S_1

Un lemme facile et utile est le

Lemme 2.6.1 *Soient S une surface lentille pour Σ , Σ_t une famille d'ouverts à bord de Σ pour $t \in [0, 1]$ et S_t une famille de surfaces lentilles pour Σ_t , alors*

- (i) *l'ensemble des t tels que S domine strictement S_t est ouvert,*
- (ii) *si $\forall t \in]0, 1]$, S domine strictement S_t alors, soit S domine strictement S_0 , soit S est tangente intérieurement à S_0 en un point intérieur à S .*

3 Variations infinitésimales et déformations

Le but essentiel de cette section est le

Lemme 3.0.2 *Soit k un réel positif tel que M soit à courbure strictement plus petite que $-k$. Soit Σ une k -surface compacte à bord $\partial\Sigma$ et soit c_t , une famille continue de déformations de $\partial\Sigma$ telle que $c_0 = \partial\Sigma$, soit $k(t)$ une fonction C^∞ de t telle que $k(0) = k$. Il existe alors une famille unique de $k(t)$ -surfaces immergées Σ^t , définie au voisinage de 0, telle que $\Sigma^0 = \Sigma$ et $\partial\Sigma^t = c^t$.*

De plus, s'il existe une famille immergée de surfaces S^t vérifiant $c_t = \partial S^t$, telle que Σ est lentille pour S^0 , alors Σ^t est lentille pour S^t au voisinage de 0.

Enfin, si $S^t \subset S^s$ pour $t \geq s$ et $k(t)$ est croissante alors Σ domine Σ^t , toujours pour t au voisinage de 0. Si de plus $S^t \neq S^0$ ou $k(t)$ est strictement croissante, alors Σ domine strictement Σ^t pour t au voisinage de zéro.

Le coeur de la démonstration de cette proposition est une proposition de déformation infinitésimale que nous allons maintenant présenter.

Soit $S \subset M$ une surface compacte immergée à bord. Notons $C_0^\infty(S)$ l'espace des fonctions C^∞ définies sur S et nulles sur le bord.

A toute $f \in C^\infty(S)$, on peut associer une *variation de surfaces* définie pour t suffisamment petit par les immersions s_t^f

$$\begin{aligned} S & \longrightarrow M \\ x & \longmapsto \exp(tfn(x)) = s_t^f(x), \end{aligned}$$

où n désigne le champ de vecteur normal extérieur à S .

Désignons par $k_t^f(x)$ la courbure extrinsèque à la surface $s_t^f(S)$ au point $s_t^f(x)$, l'opérateur L de *variation infinitésimale de courbure extrinsèque* est alors

$$\begin{aligned} C_0^\infty(S) & \longrightarrow C^\infty(S) \\ f & \longmapsto L(f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} k_t^f. \end{aligned}$$

Nous montrerons

Proposition 3.0.3 *Soit k un réel positif. Si M est à courbure strictement plus petite que $-k$ et S est à courbure extrinsèque strictement comprise entre 0 et k , alors l'opérateur L est elliptique et inversible*

Dans cette section, nous expliciterons tout d'abord l'opérateur L , puis démontrerons 3.0.3 en utilisant le principe du maximum. Enfin nous montrerons 3.0.2

3.1 Explicitation de l'opérateur L

Nous allons calculer explicitement l'opérateur L pour une surface quelconque S . Notons pour cela ν la connexion de Levi-Civita de M , R son tenseur de courbure, n le vecteur normal à S , W l'endomorphisme de TS défini par $W(u) = R(n, u)n$, κ la courbure extrinsèque de S , B l'opérateur deuxième forme fondamentale de S défini par $B(u) = \nu_u n$ et enfin $\text{Hess}(f)$ la hessienne de f .

Montrons alors

Proposition 3.1.1 *Nous avons*

$$L(f) = \kappa(-\text{trace}(\text{Hess}(f) \circ B^{-1}) + f\text{trace}(W \circ B^{-1}) - f\text{trace}(B))$$

Preuve : donnons tout d'abord le cadre de ce calcul. Il nous faut considérer la famille d'immersions s_t^f comme une application s^f de $S \times \mathbb{R}$ dans M . Nous identifions S à $S \times \{0\}$. Sur le fibré E induit de TM par s^f , nous noterons par abus de langage ν la connexion induite de la connexion de Levi-Civita de M . Nous pouvons maintenant voir $TS^f = F$, comme une section de $TS^* \otimes E$, et nous avons bien sûr $d^\nu F = 0$ et $F(\frac{\partial}{\partial t}) = fn$ le long de S .

Tout champ de vecteur u sur S donne canoniquement naissance à un champ de vecteur noté également u sur $S \times \mathbb{R}$ qui commute avec le champ $\frac{\partial}{\partial t}$. Considérons également n_t le champ de vecteur normal à $S_t = s_t^f(S)$, et n la section de E qui s'en déduit.

Par abus de notation, si v est une section de ce fibré E nous noterons

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} v(x) = (\nu_{\frac{\partial}{\partial t}} v)(x, 0)$$

Considérons A , la section de $TS^* \otimes E$ définie par

$$A(u) = \nu_u n.$$

Un premier calcul donne

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(u) = \nu_u(fn) = df(u).n + fA(u).$$

En notant \langle, \rangle la métrique de M et celle qui s'en déduit sur E , nous avons

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle n, F(u) \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} n, F(u) \right\rangle + \left\langle n, \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(u) \right\rangle.$$

Nous en tirons facilement

$$\frac{d}{dt} \big|_{t=0} = F(-\nu f).$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \big|_{t=0} A(u) &= \nu_{\frac{\partial}{\partial t}} \nu_u n \\ &= R(\frac{\partial}{\partial t}, u)n + \nu_u \nu_{\frac{\partial}{\partial t}} n \\ &= fR(n, u)n - \nu_u \nu f. \end{aligned}$$

Considérons g la métrique induite sur TS par F , c'est-à-dire définie par

$$g(u, u) = \langle F(u), F(u) \rangle$$

et B l'endomorphisme de TS défini par

$$g(B(u), u) = \langle A(u), u \rangle.$$

Rappelons que nous voulons calculer

$$L(f) = \frac{d}{dt} \big|_{t=0} \det(B).$$

Pour cela utilisons le fait que

$$\frac{d}{dt} \big|_{t=0} g(u, u) = 2f \langle A(u), F(u) \rangle = 2fg(B(u), u).$$

En dérivant l'équation $g(B(u), u) = \langle A(u), u \rangle$, nous obtenons

$$\begin{aligned} g(\frac{d}{dt} \big|_{t=0} B(u), u) &= \langle \frac{d}{dt} \big|_{t=0} A(u), u \rangle - fg(B(u), B(u)) \\ &= f \langle R(n, u)n, u \rangle - \langle \nu_u \nu f, u \rangle - fg(B(u), B(u)); \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{d}{dt} \big|_{t=0} B = fR(n, u)n - \text{Hess}(f) - fB^2.$$

La formule classique

$$\frac{d}{dt} \big|_{t=0} \log(\det(B)) = \text{trace}(\frac{d}{dt} \big|_{t=0} B \circ B^{-1}),$$

nous donne la proposition. \diamond

Citons un corollaire utile des formules démontrées dans ce paragraphe

Corollaire 3.1.2 *Supposons que M ait une courbure plus petite que $-c$. Les sphères et les horosphères de M ont alors une courbure plus grande que c . De plus, si S est une surface convexe, pour tout $k < c$, il existe R indépendant de S tel que la surface $S_R = \exp(Rn(S))$ ait ses courbures principales plus grandes que $k^{1/2}$ et en particulier sa courbure plus grande que k*

3.2 Démonstration de la proposition 3.0.3

Si κ est strictement positif, B est défini positif. En particulier, L est elliptique d'indice nul.

Pour conclure, il nous suffit de démontrer que L est injectif. La proposition suivante et une application standard du principe du maximum permettent de conclure :

Proposition 3.2.1 *Le terme de degré zéro de la formule de 3.1.1 est strictement positif :*

$$J = \text{trace}(W \circ B^{-1}) - \text{trace}(B) > 0.$$

Preuve : utilisons (e_1, e_2) une base de vecteurs propres de B associée aux valeurs propres λ_1 et λ_2 . Soit k_i la courbure du plan engendré par n et e_i .

Nous obtenons

$$\begin{aligned} J &= -\frac{k_1}{\lambda_1} - \frac{k_2}{\lambda_2} - \lambda_1 - \lambda_2 \\ &= 1 - \lambda_2\left(1 + \frac{k_1}{\kappa}\right) - \lambda_1\left(1 + \frac{k_2}{\kappa}\right) > 0. \end{aligned}$$

◇

3.3 Démonstration du lemme 3.0.2

Pour démontrer la première partie de cette proposition, nous allons procéder par étapes.

Nous résolvons tout d'abord le problème infinitésimal. Une variation infinitésimale de Σ^t , est un champ de vecteur ζ le long de Σ^t que nous pouvons écrire sous la forme

$$\zeta = fn + u,$$

où $u \in TS$, $f \in C^\infty(\Sigma^t)$, et vérifiant la condition au bord

$$\forall x \in \partial\Sigma, \quad \zeta(x) = \frac{d}{dt}c_t(x).$$

Ici, nous voyons abusivement c_t comme une famille d'immersions de $\partial\Sigma$ dans M .

Pour une surface de courbure extrinsèque κ , la variation infinitésimale de courbure extrinsèque associée à une telle variation ζ est

$$L(f) + d\kappa(u),$$

où L est l'opérateur de 3.0.3.

Pour résoudre infinitésimalement notre problème, nous devons donc montrer qu'il existe une unique fonction f telle que

$$L(f) = 0,$$

avec la condition au bord

$$\forall x \in \partial S, f(x) = \left\langle \frac{d}{dt} c_t(x), n \right\rangle.$$

Ceci découle de 3.0.3.

Nous pouvons maintenant utiliser le théorème d'inversion locale pour les opérateurs elliptiques pour résoudre notre problème localement, c'est-à-dire construire au voisinage de 0 une unique famille $t \mapsto \Sigma^t$, continue en t , de k -surfaces vérifiant $\Sigma^0 = \Sigma$ et $\partial\Sigma^t = c_t$.

Mettons nous maintenant dans le cadre de la deuxième partie de 3.0.2. Notre lemme 2.2.2 nous permet de montrer que Σ^t est lentille pour S^t

Enfin, $S^t \subset S^0$ pour $t \geq 0$, la proposition 3.2.1, assure que la fonction f décrivant la variation infinitésimale de Σ est positive, puisque dans le cas d'une surface lentille nous avons $\left\langle \frac{d}{dt} c^t(x), n \right\rangle > 0$. Ainsi Σ domine Σ^t pour t positif et suffisamment petit.

4 Théorème de compacité

Nous allons dans cette section énoncer et démontrer le théorème de compacité qui nous sera utile par la suite.

Théorème 4.0.1 *Soit M une variété d'Hadamard à géométrie bornée et à courbure plus petite que $-c < 0$, soit $\{(S_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de surfaces convexes immergées à courbure extrinsèque plus grande que c , convergeant vers (S_∞, x_∞) . Nous supposons de plus cette suite est à géométrie bornée et n'est pas de type horosphérique.*

Soit enfin $\{\Sigma\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de k_n -surfaces lentilles pour $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, où k_n converge vers $k \in]0, c[$, et notons $y_n \in \Sigma_n$ le pied de x_n .

Nous avons alors les trois possibilités suivantes

- (i) S_∞ n'est pas tubulaire à l'infini et alors, après extraction d'une sous-suite $\{(\Sigma_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface lentille non dégénérée pour S_∞ ,
- (ii) S_∞ n'est pas tubulaire, tout en étant tubulaire à l'infini, alors après extraction d'une sous-suite, $\{(\Sigma_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface lentille éventuellement dégénérée pour S_∞ ,
- (iii) S_∞ est tubulaire pour une géodésique γ et alors $\{(n(\Sigma_n), n(y_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge après extraction d'une sous-suite vers le tube de γ .

Nous allons tout d'abord rappeler les résultats principaux de [3] et leurs conséquences sur ce que nous appellerons le problème de Dirichlet pour les k -surfaces. Ensuite, nous appliquerons ces résultats pour démontrer 4.0.1.

4.1 Rappels sur les problèmes de Monge-Ampère

4.1.1 Définitions

Dans [3], nous avons étudié une classe de problèmes que nous avons appelée de Monge-Ampère et dont les k -surfaces forment une classe d'exemple. De plus, nous y avons défini une classe de problème à bord convexe correspondant, dans notre contexte, à la situation suivante.

Un *problème de Dirichlet* pour les k -surfaces est la donnée d'un quadruplet (M, S, c, x) , où c est une courbe plongée complète, tracée sur une surface plongée S localement convexe, incluse dans une variété riemannienne M . Le point x sert en particulier à donner un sens à la notion de convergence pour une suite de problèmes de Dirichlet.

Une *solution du problème* de Dirichlet est une k -surface Σ complète connexe immergée passant par x telle que $\partial\Sigma \subset c$ et Σ est intérieure à S le long de c .

Une *solution dégénérée* est une k -surface Σ dont le bord $\partial\Sigma$ est complet et inclus dans c , telle Σ est intérieure à S le long de c et telle qu'enfin $n(\Sigma) \subset UM$ soit complète, sans que Σ le soit. Remarquons que dans ce cas, toute surface équidistante de Σ est complète.

Pour des raisons techniques, nous sommes obligés d'introduire la définition suivante : si U est un ouvert de M contenant x , le problème $(U, S \cap U, c \cap U, x)$ sera appelé *problème restreint* à U et la *restriction* à U d'une solution Σ définie sur M est la composante connexe de $\Sigma \cap U$ contenant x .

4.1.2 Remarques

- (i) un tube est une surface rideau au sens de [3] ;
- (ii) une k -surface lentille Σ pour S est un cas particulier de solution du problème de Dirichlet défini par S et ∂S ;
- (iii) Si la courbure moyenne d'une solution est bornée, alors la solution est non dégénérée ;
- (iv) Si S est une k -surface dégénérée, alors toute surface équidistante est complète.
- (v) enfin, il se peut que S , c ou $\partial\Sigma$ soient vide.

4.1.3 Compacité

Pour énoncer le résultat principal de [3] , il nous faut introduire une notation : pour tout $\varepsilon > 0$ et problème de Dirichlet Δ , Δ^ε désignera le problème restreint à la boule ouverte de centre x de rayon ε . De même, Σ^ε désignera la restriction d'une solution Σ à cette boule.

Nous avons alors le

Théorème 4.1.1 *Soit $\{\Delta_n = (M_n, S_n, c_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de problèmes de Dirichlet convergeant C^∞ sur tout compact vers un problème de Dirichlet*

$$\Delta_\infty = (M_\infty, S_\infty, c_\infty, x_\infty)$$

et soit $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de k_n -solutions, éventuellement dégénérée de $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ où $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $k \in]0, c[$. Il existe alors ϵ , tel que nous ayons l'alternative suivante, après extraction d'une sous-suite :

(a) soit $\{\Sigma_n^\varepsilon\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -solution, éventuellement dégénérée, du problème de Dirichlet $\Delta_\infty^\varepsilon$;

(b) soit $\{n(\Sigma_n^\varepsilon)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un tube. Dans ce cas, à partir d'un certain rang $\partial\Sigma_n^\varepsilon = \emptyset$.

Enfin, nous tirons de ce théorème les corollaires suivant, particulier à la courbure négative

Corollaire 4.1.2 *Soit $\{\Delta_n = (M_n, S_n, c_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de problèmes de Dirichlet convergeant C^∞ sur tout compact vers un problème de Dirichlet*

$$\Delta_\infty = (M_\infty, S_\infty, c_\infty, x_\infty)$$

et soit $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de k_n -solutions, éventuellement dégénérée de $\{\Delta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, où $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $k \in]0, c[$. Alors la suite de surfaces

$$W_n = \{\exp(n(s)), \quad s \in \Sigma_n\}$$

pointée en $\exp(n(x_n))$ converge C^∞ après extraction d'une sous suite.

Preuve : ceci provient de ce que la restriction de l'exponentielle à un tube est une immersion à valeur dans M . \diamond

Corollaire 4.1.3 Soit $\{(f_n, S)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de surfaces immergées localement convexes convergeant C^∞ sur tout compact vers une surface immergée (f_0, S) et soit $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives définies sur S dont les graphes sont des k -surfaces. On suppose que pour tout $y \in S$, la suite $\{l_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors après extraction d'une sous-suite, la suite de fonctions $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge C^∞ sur tout compact de S vers une fonction dont le graphe est une k -surface

Preuve : il suffit pour cela d'appliquer le théorème de compacité 4.1.1 pour la suite de problèmes de Dirichlet (à bord vide) définie dans les bouts des surfaces $f_n(S)$. \diamond

4.2 Une première majoration

Nous nous donnons donc à partir de maintenant une suite $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de k_n -surfaces lentilles pour $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose de plus que $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S_∞ qui est à géométrie bornée.

Soit $\{\lambda\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions associées définies sur N_{Σ_n} l'ensemble des vecteurs normaux étendus à Σ_n .

Nous voulons tout d'abord montrer

Proposition 4.2.1 Si la suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de type horosphérique, alors la suite de fonctions $\{\lambda\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée

Preuve : raisonnons par l'absurde et supposons que Λ_n , le maximum de λ_n , tende vers l'infini. Il existe alors deux suites de points $\{w_n \in S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{v_n \in N_{\Sigma_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, où N_{Σ_n} désigne l'ensemble des vecteurs normaux étendus à Σ_n telles que

- (i) $w_n = \exp(\lambda_n(v_n)v_n)$;
- (ii) la suite $\{\lambda_n(v_n) - \Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tende vers zéro.

Notons, pour tout R , S_n^R , la composante connexe de l'intersection de S_n avec la boule ouverte de M de centre w_n et de rayon R . Notons U_n le champ de vecteur focal le long de S_n .

La suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant à géométrie bornée, en extrayant au besoin une sous-suite, nous pouvons supposer que $\{S_n^R, w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Les fonction inverses μ_n définies sur S_n étant 2-lipschitziennes par le lemme 2.2.1, nous pouvons extraire une sous-suite telle que la suite de fonctions $\{\mu_n - \Lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction 2-lipschitzienne négative g . En particulier $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'infini sur S_n^R .

Nous en tirons deux conséquences :

(a) pour tout L , il existe n_0 , tel que si $n \geq n_0$ alors $d_i(y_n, \partial S_n^R) \geq L$ (où d_i désigne la distance riemannienne dans S_n) puisque la restriction de μ_n au bord de Σ_n est nulle

(b) à partir d'un certain rang, pour tout $0 < t < 2R$ et $z, w \in S_n^R$, $d(\exp(-tU_n(z)), -tU_n(w)) \leq d(z, w)$.

Rappelons que dans une variété à courbure négative, une hypersurface sans bord localement convexe et complète respectivement à une boule, est plongée et borde un convexe.

En utilisant (a) et ce rappel, nous en déduisons que $\{S_n, v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur tout compact vers une hypersurface plongée globalement convexe (H, v) .

Grâce à (b), en extrayant une sous-suite de telle sorte que $\{U_n(v_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un vecteur U , nous en déduisons que $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur tout compact vers le champ de gradient de la fonction de Buseman f associée à $\exp(-\infty U)$ qui va se retrouver transverse à H .

Par construction $f|_H - f(v) = g - g(v)$, et nous en déduisons que $f|_H - f(v) \leq g(v) = 0$, et H est de donc de type horosphérique, ce qui est interdit par hypothèse. \diamond

4.3 Surfaces tubulaires et tubes

Introduisons une définition intermédiaire.

Soit $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de points de $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Notons alors $y_n \in \Sigma_n$ le point pied associé à $w_n = \exp(\lambda_n(u_n)u_n)$, (cf 2.2.2) et Σ_n^ε la composante connexe de $\Sigma_n \cap B(y_n, \varepsilon)$, où ε est fourni par le théorème 4.1.1 de compacité sur les problèmes de Monge-Ampère. Nous dirons que la suite $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est *critique*, si après extraction d'une sous suite, $\{n(\Sigma_n^\varepsilon), u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un tube, c'est-à-dire si nous sommes dans le deuxième cas de l'alternative de 4.1.1, nous dirons de plus dans ce cas, par abus de langage, que la suite critique *converge* vers $N(\gamma)$. Remarquons que dans ce cas, d'après le théorème cité, à partir d'un certain rang y_n est un point intérieur à S_n et u_n est le vecteur normal à y_n .

Nous démontrerons deux propositions, nous avons tout d'abord

Proposition 4.3.1 *Si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de type horosphérique et s'il existe une suite critique, alors la surface S^∞ est tubulaire*

Preuve : raisonnons par l'absurde et supposons nous donnée une suite critique $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Soit y_n la suite de points pieds associés dans $\{\Sigma\}_{n \in \mathbb{N}}$, et posons $u_n = n(y_n) \in n(\Sigma_n)$. Le théorème 4.1.1 assure alors que $\{n(\Sigma_n), u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en tant que variété immergée pointée vers un revêtement $\bar{N}(\gamma)$ d'un tube pointé $N(\gamma)$. Comme $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ elle-même converge, la suite de fonctions inverse $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ va elle aussi converger sur tout compact vers la fonction distance d_γ à cette géodésique qui sera bornée par d'après 4.2.1. Par construction, le champ de gradient de d_γ sera dirigé vers l'intérieur de S^∞ . Par définition, S^∞ est tubulaire. \diamond

Réciproquement, nous avons

Proposition 4.3.2 *Si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est à géométrie bornée et n'est pas de type horosphérique, si S_∞ est tubulaire pour γ alors toute suite convergente est critique et converge vers $N(\gamma)$*

Preuve : soit γ la géodésique associée à S_∞ et μ la fonction distance à cette géodésique. Raisonnons par l'absurde et soit $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de points non critique. Notons comme d'habitude $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $y_n \in \Sigma_n$ la suite de points pieds associées. En utilisant le théorème 4.1.1, nous pouvons donc extraire une sous-suite telle que $\{(\Sigma_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface, Σ_∞ , éventuellement dégénérée.

D'après la proposition 4.2.1 et le fait que S_∞ est tubulaire nous en déduisons que μ est bornée sur Σ_∞ . Soit Λ sa borne supérieure.

Construisons maintenant une suite de points $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $s_n \in \Sigma_\infty$ telle que $\mu(s_n)$ tende vers Λ . La variété M étant à géométrie bornée ainsi que la suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, nous pouvons extraire une sous suite telle que

$$\{\Delta_n = (M, s_n, \partial S_n, \partial S_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers $\Delta_0 = (M_0, s_0, \partial S_0, S_O)$.

Nous voulons maintenant appliquer notre théorème de compacité 4.1.1 à la suite $\{(\Sigma_\infty, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ solutions des problèmes de Dirichlet Δ_n .

Nous avons donc *a priori* deux possibilités,

- (a) soit $\{(\Sigma_\infty, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface, éventuellement dégénérée,
- (b) soit $\{(n(\Sigma_\infty), n(s_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un tube $N(\bar{\gamma})$.

Éliminons (b) : puisque μ est bornée sur Σ_∞ , nécessairement $\bar{\gamma}$ et γ sont à distance bornée. Ces deux géodésiques ont alors confondues. Autrement dit, Λ est

nulle ce qui entraîne que la restriction de μ est nulle sur Σ_∞ . Ceci est impossible pour une k -surface.

Ainsi nous ne pouvons être que dans le cadre de (a) et $\{(\Sigma_\infty, s_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface, éventuellement dégénérée, $(\bar{\Sigma}_\infty, s_\infty)$. La fonction μ restreinte à $\bar{\Sigma}_\infty$ atteint son maximum en s_∞ par construction. Ceci signifie que $\bar{\Sigma}_\infty$ est intérieurement tangente à la surface convexe G_Λ à distance constante Λ de γ . Ceci est impossible à cause du principe du maximum géométrique puisque G_Λ est à courbure extrinsèque strictement plus grande que $-c$.

Nous venons de montrer que toute suite convergente est critique. Par ailleurs, si une suite critique converge vers $N(\bar{\gamma})$, nous avons $\bar{\gamma} = \gamma$ puisque μ est bornée,. \diamond

4.3.1 Démonstration du théorème 4.0.1

Soit donc $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de surfaces à courbure supérieure à c , pointée en $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et convergeant vers S_∞ pointée en x_∞ . Soit enfin $\{\Sigma\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de k -surfaces lentilles pour $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des pieds de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que la suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de type horosphérique et est à géométrie bornée.

Si S_∞ est tubulaire, la proposition 4.3.2 est exactement (iii) de 4.0.1.

Supposons maintenant que S_∞ n'est pas tubulaire. D'après la proposition 4.3.1, aucune suite convergente de points de $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est critique. Le théorème 4.1.1 nous permet donc d'assurer que la suite $\{\Sigma\}_{n \in \mathbb{N}}$ pointée en $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, converge vers une solution éventuellement dégénérée Σ_∞ du problème de Dirichlet pour S_∞ . Il nous reste à montrer que Σ_∞ est lentille pour S_∞ .

Notons comme précédemment $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de fonctions associées convergeant vers λ_∞ , pour conclure il suffit de démontrer :

- (a) λ_∞ est strictement positive sur S_∞ ;
- (b) si u est le vecteur normal intérieur à ∂S_∞ dans S_∞ et si n est le champ de vecteur normal extérieur à Σ_∞ alors $\langle u, n \rangle > 0$ le long de ∂S_∞ .

La preuve de (a) est simple : nous savons déjà que λ_∞ est positive ou nulle puisque les λ_n le sont. Si maintenant, λ_∞ est nulle en un point intérieur à S_∞ nous en déduisons que Σ_∞ est tangente intérieurement à S_∞ en ce point ce qui est impossible à cause des conditions de courbure et du principe du maximum géométrique 2.5.1.

Pour (b), remarquons que, par passage à la limite $\langle u, n \rangle \geq 0$ le long de ∂S_∞ . Si en un point z , $\langle u, n \rangle = 0$, alors les deux surfaces sont tangentes en ce point z . Elles ne peuvent être tangentes extérieurement : si deux surfaces convexes sont tangentes extérieurement en un point, alors au moins au voisinage de ce point leur intersection est réduite à ce point. Rappelons maintenant que chaque S_n est un graphe au dessus

d'un ensemble fermé du normal étendu à Σ_n . Ceci va être également vrai à la limite ; puisqu'enfin en z les surfaces sont tangentes, Σ_∞ est tangente intérieurement à S_∞ , ce qui est impossible à cause des hypothèses de courbure et du principe du maximum géométrique.

Enfin, 4.3.1 et 4.3.2 montre que S_∞ est tubulaire à l'infini, si et seulement si il existe une suite $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\{M, w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\{\Sigma_\infty, w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est critique. En particulier, si S_∞ n'est pas tubulaire à l'infini alors la courbure moyenne des Σ_n est uniformément bornée. \diamond

5 Problème de Plateau pour les disques

La démonstration de notre lemme de Morse va se faire par étapes et la première d'entre elles est la résolution du problème de Plateau pour les disques.

Nous allons en fait démontrer un résultat plus précis qui est le but de cette section :

Proposition 5.0.3 *Soit S un disque compact immergé à courbure $> c$, dans une variété d'Hadamard à courbure plus petite que $-c$. Alors, pour tout $k \in]0, c[$, il existe une unique k -surface lentille Σ pour S .*

De plus, si $c > k_1 \geq k > 0$, si Σ_1 est la k_1 -surface lentille pour un disque $S_1 \subset S$, alors Σ domine Σ_1 au sens de 5.3.1.

Nous allons utiliser une méthode de déformation.

5.1 Déformation contractante

Soit $k \in]0, c[$. Notons f_1 l'immersion du disque S dans M . Identifions d'une manière ou d'une autre ce disque à la boule unité de \mathbb{R}^2 . Soit alors f_t , $t \in]0, 1]$, la famille d'immersions de S dans M définie par $f_t(x) = f_1(tx)$.

Le but de ce paragraphe est de démontrer la

Proposition 5.1.1 *Soit Σ une k -surface lentille pour f_1 , et $k(t)$ une fonction croissante à valeurs dans $]0, c[$ telle que $k(0) = k$. Il existe alors une unique famille continue de $k(t)$ -surfaces lentilles Σ_t pour $f_t(S)$, définie pour tout $t \in]0, 1]$ et vérifiant $\Sigma_1 = \Sigma$. Enfin, quand t tend vers 0, Σ_t tend vers $f_1(0)$ au sens de la topologie de Hausdorff pour les compacts*

Preuve : nous utilisons la proposition 3.0.2 pour construire au voisinage de 1 une famille de déformations de Σ_1 . D'après la deuxième partie de cette assertion, nous obtenons de plus que si $t > s$ alors Σ_s domine Σ_t .

Supposons nous donnée une déformation de Σ_1 pour t dans un intervalle $]a, 1]$. Pour conclure la démonstration de la première partie de la proposition 5.1.1, il nous reste à montrer que pour toute suite $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers a par valeurs supérieures, alors la suite $\{\Sigma_{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une surface lentille pour $f(S_a)$.

Le corollaire de notre théorème de compacité 4.0.1 nous permet d'affirmer qu'après extraction éventuelle d'une sous suite, $\{\Sigma_{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface.

Enfin si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\bar{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites convergeant vers a par valeurs supérieures, telles que les suites $\{\Sigma_{a_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\Sigma_{\bar{a}_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers Σ_a et $\Sigma_{\bar{a}}$, nous obtenons que Σ_a domine $\Sigma_{\bar{a}}$ et réciproquement. Ainsi $\Sigma_a = \Sigma_{\bar{a}}$, ce qui achève de démontrer que si t tend vers a par valeurs inférieures, Σ_t converge.

Ce dernier point termine la démonstration de la première partie de notre proposition.

La deuxième partie de la proposition découle immédiatement de la proposition 2.5.2 qui affirme : si S est une surface compacte dont le bord ∂S est incluse dans une boule B , alors toute k -surface Σ , pour $k \leq c$, solution du problème de Dirichlet pour S est incluse dans la boule B . \diamond

5.2 Unicité

Nous pouvons maintenant montrer

Proposition 5.2.1 *Soit S un disque compact immergé à courbure $> c$, k_1 et k tels que $0 < k \leq k_1 < c$. Si Σ est une k -surface lentille pour S , et Σ_1 une k_1 -surface lentille pour $S_1 \subset S$, alors Σ domine Σ_1 .*

En particulier, il existe au plus une k -surface lentille pour S .

Preuve : considérons comme dans le paragraphe précédent, f_1 l'immersion de notre disque S_1 et f_t la famille contractante d'immersions associée, soit de plus $k(t)$ une fonction strictement décroissante à valeurs dans $]0, c[$, telle que $k_1 = k(1)$.

Soit Σ_1 comme dans l'énoncé ; la proposition 5.1.1 nous permet de lui associer une famille de k_1 -surfaces lentilles Σ_t pour f_t . Pour montrer que Σ domine Σ_1 , il suffit de montrer que Σ domine Σ_t pour tout t .

En vertu de notre lemme de domination 2.6.1 et du principe du maximum géométrique 2.5.1, il suffit en fait de montrer qu'il existe t , tel que Σ domine strictement Σ_t . Mais ceci découle de la dernière partie de la proposition 5.1.1 : clairement, puisque Σ_t converge vers un point dans la topologie de Hausdorff quand t tend vers 0, Σ domine Σ_t , pour t suffisamment petit. \diamond

5.3 Existence

Pour conclure la démonstration de 5.0.3, il nous faut montrer l'existence d'une surface lentille pour notre disque immergé S , nous allons pour cela construire une nouvelle famille de déformations de ce disque.

Ce disque étant compact, il est inclus dans une boule B . Nous pouvons alors perturber la métrique de M dans un petit ouvert U n'intersectant pas cette boule B de façon à ce que la nouvelle métrique soit toujours à courbure plus petite que $-c$, et que de plus elle soit à courbure constante dans une boule $B_0 \subset U$.

Il suffit de montrer de montrer l'existence d'une surface lentille pour la métrique perturbée puisque d'après 2.5.2, cette surface lentille sera incluse dans B et sera donc lentille pour la métrique originelle.

Il est maintenant facile mais technique de montrer le lemme

Lemme 5.3.1 *Soit S un disque immergé à courbure extrinsèque plus grande que c_1 , il existe alors une déformation continue S_t , $S_0 = S$ de ce disque $t \in [0, 1]$, telle que*

- (i) *pour tout t , la courbure extrinsèque de f_t est plus grande que c_1 ;*
- (ii) *$S_1 \subset B_0$ est à courbure constante, et son bord est inclus dans un plan totalement géodésique de B_0 .*

Preuve : nous allons donner une esquisse de la construction de cette déformation. Nous utilisons tout d'abord la déformation contractante pour déformer notre disque en un tout petit disque inclus dans le bord d'une surface convexe. Ce petit disque va alors être un graphe au dessus d'un disque topologique sur une sphère de petit rayon. Ensuite nous déplaçons cette sphère de telle sorte qu'elle soit incluse dans B_0 et le tour est joué. \diamond

Utilisons cette déformation pour construire une k -surface lentille pour S .

En utilisant les équidistantes aux plans totalement géodésiques dans l'espace hyperbolique, nous construisons une k -surface lentille pour S_1 .

Notre lemme 3.0.2 nous permet de construire une famille continue de k -surfaces lentilles Σ_t pour S_t sur un intervalle maximal $]a, 1]$. Le théorème de compacité 4.0.1 et l'unicité 5.2.1, entraînent que Σ_t converge lorsque t tend vers a ; ainsi $a = 0$ et nous avons terminé notre démonstration.

6 Démonstration du lemme de Morse pour les surfaces convexes

Dans toute cette section, S désignera une surface localement convexe, éventuellement à bord, à courbure plus grande que c , à géométrie bornée et qui n'est ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire, ni compacte sans bord.

Le but de cette section est le lemme suivant, que nous appelons lemme de Morse pour les surfaces convexes.

Lemme 6.0.2 *Soit M une variété d'Hadamard à géométrie bornée et à courbure strictement plus petite que $-c < 0$. Soit S une surface localement convexe, éventuellement à bord, à courbure plus grande que c , à géométrie bornée et qui n'est ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire, ni compacte sans bord. Alors, pour tout $k \in]0, c[$, il existe une unique k -surface lentille, éventuellement dégénérée, pour S .*

De plus, si S n'est pas tubulaire à l'infini, cette k -surface est non dégénérée.

Il suffit de démontrer ce résultat quand S est un disque topologique : dans le cas général, il suffit en effet de passer au revêtement universel et d'utiliser l'unicité pour conclure.

Nous supposons donc dans toute la suite que S est un disque. Notre lemme de Morse est une conséquence immédiate des deux propositions suivantes 6.1.1 et 6.2.1, où nous démontrons successivement l'existence et l'unicité d'une k -surface lentille pour S .

6.1 Existence

Nous allons montrer la proposition :

Proposition 6.1.1 *Il existe une k -surface lentille Σ pour S , telle que pour toute k -surface lentille $\bar{\Sigma}$ pour S , $\bar{\Sigma}$ domine Σ . De plus si S n'est pas tubulaire à l'infini, Σ est non dégénérée.*

Preuve : considérons S_t une famille continue de disques inclus dans S définie pour $t \in]0, 1]$ et vérifiant

- (i) $S_1 = S$;
- (ii) S_t est compact à bord pour $t \neq 1$;
- (iii) $S_t \subset S_s$ si $t \leq s$;
- (iv) S_t converge vers un point x_0 quand t tend vers 0.

La proposition 5.0.3 nous permet donc de construire une famille Σ_t de k -surfaces lentilles pour S_t . par ailleurs, notre théorème de compacité 4.1.1, nous permet d'extraire une suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 1, telle que $\{\Sigma_{t_n}, y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface lentille pointée Σ quand n tend vers l'infini. Ici, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ désigne bien sûr la suite de points pieds de x_0 dans Σ_{t_n} .

Si maintenant \bar{S} est une autre surface lentille, il est clair que $\bar{\Sigma}$ domine Σ_t pour t petit. Ensuite notre lemme 2.6.1 et le principe du maximum 2.5.1 assure que $\bar{\Sigma}$ domine strictement Σ_t domine t pour tout t . Ainsi $\bar{\Sigma}$ domine-t-elle également Σ .
 \diamond

6.2 Unicité

L'unicité d'une k -surface lentille découle immédiatement de la proposition précédente 6.1.1 et de

Proposition 6.2.1 *Si Σ_1 et Σ_2 sont deux k -surfaces lentilles pour S telles que Σ_1 domine Σ_2 alors $\Sigma_1 = \Sigma_2$*

Preuve :soit N_{Σ_1} le fibré normal étendu. Soit F l'immersion naturelle de $M_1 = N_{\Sigma_1} \times \mathbb{R}^+$ dans M qui à (n, t) associe $\exp(tn)$. Notons μ la fonction de M_1 qui à (n, t) associe t , G_λ la surface localement convexe de niveau λ pour la fonction μ , et enfin π la projection de M_1 dans Σ_1 .

Par définition, puisque Σ_1 domine Σ_2 , nous pouvons trouver une immersion i de Σ_2 dans M_1 , telle que $F \circ i$ est l'immersion initiale de Σ_2 .

Confondons Σ_2 et son image dans M_1 . Notre but est de montrer que μ restreinte à Σ_2 est nulle.

Supposons donc le contraire et soit $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de S_2 , telle que $\{\mu(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la borne supérieure $\Lambda \neq 0$ de μ sur Σ_2 .

Extrayons de $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite telle que $\{M, w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une variété (M_0, w_∞) , et utilisons le théorème de compacité 4.1.1 pour extraire de la suite $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite telle que les deux suites $\{\Sigma_1, z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\Sigma_2, w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Ici $z_n = \pi \circ i(w_n)$ où π est la projection naturelle de M_1 dans Σ_1 .

En ce qui concerne $\{\Sigma_1, z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, nous avons comme toujours deux possibilités :

- soit $\{\Sigma_1, z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface,
- soit $\{n(\Sigma_1), n(z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un tube.

Néanmoins, dans ces deux cas, la suite de surfaces convexes pointées

$$\{G_\Lambda, \exp(\Lambda n(z_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers une surface strictement convexe lisse à courbure strictement plus grande que k .

Examinons maintenant $\{\Sigma_2, w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, nous avons aussi deux cas.

(a) Soit $\{\Sigma_2, w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface; le principe du maximum géométrique 2.5.1 exclut cette possibilité puisque cette k -surface serait alors tangente intérieurement d'après notre construction à G_Λ .

(b) Soit $\{n(\Sigma_2), n(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un tube $N(\gamma)$, ceci est à nouveau exclus puisque alors la géodésique γ serait tangente intérieurement à G_Λ qui est strictement convexe.

Ainsi $\Lambda = 0$, et nous avons terminé notre démonstration. \diamond

7 Problèmes asymptotiques

Rappelons le problème de Plateau asymptotique : nous nous donnons une immersion i d'une surface S dans $\partial_\infty M$ le bord à l'infini de M , et nous cherchons une immersion f de S dans M , telle que

- (i) $f(S)$ soit une k -surface éventuellement dégénérée
- (ii) si N est l'application de Gauss-Minkowski de $f(S)$ dans $\partial_\infty M$ qui à un point associe le point à l'infini de la normale extérieure asymptote, alors

$$i = N \circ f.$$

Le couple (i, S) sera la *donnée* de ce problème de Plateau asymptotique et (f, S) , ou plus simplement f , sera une *solution* de ce problème.

Nous allons résoudre ce problème tout d'abord dans le cas où S est le disque ouvert et où f s'étend en un plongement du disque fermé. Nous utiliserons ce résultat pour montrer l'unicité de la solution du problème de Plateau, puis l'existence dans les cas qui nous intéressent.

7.1 Disques plongés

Nous voulons montrer le

Lemme 7.1.1 *Soit f un plongement du disque fermé \bar{D} dans le bord à l'infini $\partial_\infty M$, alors il existe une unique k -surface plongée solution du problème de Plateau à l'infini défini par f restreinte au disque ouvert D*

Preuve : il suit des constructions de [1], le fait, désormais classique, qu'il existe une surface convexe S , plongée homéomorphe au disque, bordant un convexe C telle

que l'application de Gauss-Minkowski soit un homéomorphisme de S sur $f(D)$; on considère pour cela S_0 le bord de l'enveloppe convexe de $\partial_\infty M \setminus f(D)$. En remplaçant au besoin cette surface par la surface S_{ε_0} à distance constante ε_0 où ε_0 ne dépend que de k et pas de S_0 , on peut de plus supposer qu'elle a une courbure strictement plus grande que k (cf. corollaire 3.1.2).

La k -surface Σ_k lentille pour S_ε produite par le lemme de Morse 6.0.2 est alors une solution du problème asymptotique. Il s'agit maintenant de montrer l'unicité de cette solution que nous appellerons pour le moment *canonique*. Soit donc $\bar{\Sigma}_k$ une autre solution, nous voulons montrer que $\bar{\Sigma}_k = \Sigma_k$.

Pour cela, nous allons raisonner en deux temps.

(i) Les trois surfaces $\bar{\Sigma}_k$, Σ_k et S_0 bordent des convexes que nous noterons \bar{O}_k , O_k et U_0 respectivement. Nous voulons montrer que $\bar{\Sigma}_k$ se trouve à l'extérieur de Σ_k , c'est-à-dire que $O_k \subset \bar{O}_k$.

Bien sûr, nous avons

$$U_0 \subset \bar{O}_k, \quad U_0 \subset O_k.$$

Par construction la surface Σ_k est coincée entre S_ε (c'est une surface lentille) et S_0 (elle borde un convexe). En particulier lorsque k tend vers 0, Σ_k tend vers S_0 . Notons F la surface convexe à distance ε_0 de \bar{O}_k ; comme $U_0 \subset \bar{O}_k$, F se trouve à l'extérieur de O_k .

Soit alors $t \mapsto k_t$ une fonction continue strictement décroissante de $[0, 1]$ dans $[k, k_0]$ où k_0 est choisi de telle sorte que la courbure de F soit strictement plus grande que k_0 . Par ailleurs soit B_t , $t \in [0, 1]$ une suite exhaustive continue de compacts à bord lisse de F , k_t et F_t la suite de $k(t)$ -surfaces solutions du problème de Plateau pour B_t . Par le principe de maximum géométrique et un argument de déformation, F_t se trouve toujours à l'extérieur de O_k . Enfin, lorsque t tend vers 1, nous avons vu que F_t converge vers la solution du problème de Plateau pour F , c'est-à-dire $\bar{\Sigma}_k$.

Ainsi $\bar{\Sigma}_k$ se trouve à l'extérieur de Σ_k .

(ii) Par ailleurs, soit D^r le disque de rayon r inclus dans D , et $k(r)$ une fonction de r strictement décroissante. notons alors S_ε^r à distance constante ε du bord de l'enveloppe convexe de $\partial_\infty M \setminus f(D^r)$ la surface et $\Sigma_{k(r)}^r$ la $k(r)$ -solution canonique du problème de Plateau asymptotique pour D^r . Les familles $\{S_\varepsilon^r\}_{r \in [0, 1]}$ et $\{\Sigma_{k(r)}^r\}_{r \in [0, 1]}$ dépendent continuellement de r , ainsi que les surfaces $\{\Sigma_{k(r)}^r\}_{r \in [0, 1]}$. Notre deuxième remarque est la suivante : pour r strictement plus petit que 1 $\bar{\Sigma}_k$ est nécessairement à l'intérieur de $\Sigma_{k(r)}^r$. En effet, dans le cas contraire, nous pourrions trouver une surface compacte U , $U \subset \bar{\Sigma}_k$ dont le bord serait dans $\Sigma_{k(r)}^r$ (les deux surfaces s'intersectant transversalement par le principe de maximum géométrique

2.5.1) et en particulier borderait $V \subset \Sigma_k^r$. La surface V serait alors lentille pour U . Ceci est impossible : en effet la k -surface W lentille pour V serait également lentille pour U , et nous aurions ainsi deux k -surfaces lentilles pour U , à savoir U et W .

En faisant tendre r vers 1, on obtient bien que $\bar{\Sigma}_k = \Sigma_k$. \diamond

Nous allons par la suite avoir besoin d'un lemme plus explicite, utilisant que M est à géométrie bornée. Ce lemme est l'analogue de la δ -hyperbolicité pour les géodésiques, ou du caractère fin des triangles en courbure strictement négative. Pour cela, notons $U_\alpha^{(z,u)} \subset M$ le cône d'angle α autour du vecteur u en z .

Remarquons de plus que par compacité et géométrie bornée, il existe une constante $0 < \alpha_0 < \pi/2$ telle que $\alpha \leq \alpha_0$ entraîne que, pour tout z, u , le point z appartient à l'enveloppe convexe de $\partial_\infty M \setminus \partial_\infty U_\alpha^{(z,u)}$.

Lemme 7.1.2 *Soit $0 \leq \beta < \alpha < \alpha_0$, il existe une constante $\delta(\alpha, \beta)$ ne dépendant que de α et β telle que si z est un point quelconque de M , et S la solution du problème de plateau asymptotique pour $\partial_\infty U_\alpha^{(z,u)}$, alors elle est incluse dans $U_\alpha^{(z,u)}$ et toute géodésique joignant z à un point de $\partial_\infty U_\beta^{(y,u)}$ intersecte S à une distance plus petite que $\delta(\alpha, \beta)$ de y*

Preuve : ce lemme découle immédiatement du résultat précédent et d'un argument de compacité \diamond

7.2 Unicité

Nous voulons montrer

Théorème 7.2.1 *Il existe au plus une solution du problème de Plateau asymptotique. De plus si (f, S) est une k -surface (pas nécessairement complète) et si $\Sigma \subset S$, alors il existe une solution du problème de Plateau asymptotique pour (N, Σ) , où N est l'application de Gauss Minkowski, et cette solution est un graphe au dessus de (f, Σ)*

Ce théorème découle immédiatement des trois propositions suivantes :

Proposition 7.2.2 *Supposons que S est un disque, et soient (f, S) et (g, S) deux solutions du problème de plateau asymptotique, il existe alors une troisième solution du problème de Plateau (h, S) qui est un graphe à la fois au dessus de $f(S)$ et $g(S)$.*

Proposition 7.2.3 *Soit Σ une k -surface éventuellement dégénérée et soit Σ_1 une k -surface qui est un graphe au dessus de Σ , alors $\Sigma = \Sigma_1$*

L'unicité découle immédiatement de ces deux premières propositions (en passant au besoin au revêtement universel), et la dernière partie du théorème du résultat suivant, qui va être l'outil fondamental dans la démonstration des deux premières propositions.

Proposition 7.2.4 *Soit (f, S) une k -surface éventuellement dégénérée et soit Σ un ouvert de S . Il existe alors une solution du problème de Plateau asymptotique pour (N, Σ) , où N est l'application de Gauss Minkowski, telle que cette solution est un graphe au dessus de (f, Σ) .*

7.2.1 Démonstration de la proposition 7.2.4

Preuve :examinons tout d'abord le cas où Σ est un ouvert à bord lisse et relativement compact de S .

Posons $\Sigma_0 = f(\Sigma)$, et considérons Σ_r^0 la surface "à distance r " de Σ_0 , c'est à dire, en notant n le champ de vecteur normal extérieur à $f(S)$,

$$\Sigma_r^0 = \{exp(rn(s)), s \in \Sigma_0\}.$$

Soit ensuite Σ_r la solution du problème de Plateau pour D_r . La famille $\{\Sigma_r\}$ forme alors une famille continue, notre but est bien sûr de montrer que $\{\Sigma_r\}$ converge, quand r tend vers $+\infty$ vers une solution du problème de Plateau asymptotique que nous recherchons.

(i) Montrons tout d'abord que pour tout r , Σ_r est un graphe au dessus de Σ_0 .

Remarquons tout d'abord que ceci est vrai pour r petit. En effet, si g est la fonction correspondant à la variation infinitésimale de Σ_r en $r = 0$, cette fonction satisfait $L(g) = 0$ et $g|_{\partial\Sigma_0} > 0$, où L est l'opérateur elliptique défini en 3.0.2. Il suit de 3.2.1 et du principe de maximum que $g > 0$.

Pour montrer que pour tout r , Σ_r est un graphe au dessus de Σ_0 , considérons l'ensemble O des r tels que Σ_r soit un graphe. L'ensemble O est évidemment un ouvert de \mathbb{R}^+ . Soit alors $[0, r_0[$ la composante connexe de 0. Raisonnons par l'absurde et supposons que r_0 est finie.

Pour r plus petit que r_0 , la surface Σ_r sépare le bout B de Σ_0 en deux composantes connexes l'une bornée et contenant Σ_0 , et l'autre non bornée.

Par continuité, la surface Σ_{r_0} étant limite de graphes, la normale extérieure à Σ_{r_0} va toujours pointer vers une composante connexe de $B \setminus \Sigma_{r_0}$ ne contenant pas Σ_0 . Mais par ailleurs, cette surface n'est pas un graphe et il existe donc un point x de Σ_0 en tel que la normale issue de x est tangent intérieurement à Σ_{r_0} en un point y . Par convexité locale de Σ_{r_0} , la normale extérieur en y serait alors dirigée vers une composante connexe de $B \setminus \Sigma_{r_0}$ contenant x d'où la contradiction.

(ii) Associons donc à Σ_r , la fonction f_r dont elle est le graphe. Montrons maintenant que pour tout y , $f_r(y)$ est bornée.

Soit u le vecteur normal en y , il existe alors $\alpha > 0$ petit tel que $U_\alpha^{(y,u)}$ soit plongé dans le bout de Σ . Si D est la solution du problème de Plateau asymptotique pour $\partial_\infty U_\alpha^{y,u}$, elle va pouvoir être plongée dans le bout de Σ , nous savons alors que la géodésique issue de y dans la direction de u intersecte D au temps K . Par le principe du maximum géométrique la surface D va alors servir de barrière à la famille $\{\Sigma_r\}$, et nous en déduisons que $\forall r, f_r(y) \leq K$.

(iv) Nous pouvons maintenant montrer maintenant montrer que la suite $\{\Sigma_r\}$ converge après extraction éventuelle d'une sous-suite vers une surface Σ_∞ qui est le graphe d'une fonction λ définie sur Σ_0 et propre (*i.e.* tendant vers l'infini lorsque l'on tend vers le bord de Σ_0).

Considérons la suite de fonctions $\{f_r\}$ définies au paragraphe précédent. Pour chaque y la suite $\{f_{r(y)}\}$ est croissante et bornée. Nous en déduisons immédiatement que cette suite de fonctions converge vers une fonction λ propre et de graphe convexe. Pour cela, il faut bien sûr utiliser la classique compacité des convexes en courbure négative. Il nous reste à montrer que le graphe de la limite est une k -surface. Ceci découle immédiatement du théorème 4.1.1 appliqué au problème de Dirichlet à bord vide défini sur le bout de Σ_0 et de la remarque suivante : la suite de surfaces $\{\Sigma_r\}$ est toujours transverse au champ de vecteur normal à Σ_0 (ce sont des graphes), et en particulier on ne peut pas voir apparaître de tubes à la limite.

(v) Montrons enfin que la surface limite Σ_∞ est une solution du problème de Plateau asymptotique pour (N, Σ_0) . Notons B le bout de S . La surface Σ_∞ va séparer B en deux composantes connexes. Soit C la composante connexe de l'extérieur de Σ_∞ . Par construction $\partial_\infty C = N(\Sigma_0)$, en particulier, nous en déduisons que l'application de Gauss-Minkowski de Σ_∞ est injective et à valeurs dans Σ_0 vu comme sous-ensemble du bord à l'infini de B grâce à l'application de Gauss-Minkowski de S . Il nous reste à montrer que cette application est surjective. Pour cela, il suffit de remarquer que si $v \in N(\Sigma_0)$ et si h est la fonction horosphérique associée à v , alors h est propre sur Σ_∞ , elle admet donc un minimum c'est à dire un point dont la normale pointe vers v .

(vi) Il nous reste à examiner le cas où Σ_0 n'est pas à bord lisse et relativement compact. On construit alors une suite $\{\Sigma_r^0\}$ d'ouverts à bord lisse et relativement compacts, emboîtés et dont la réunion est Σ_0 . D'après ce que nous venons de voir, nous pouvons alors construire une suite $\{\Sigma_r\}$ de k -surfaces dans B , le bout de Σ_0 , dont les bouts sont emboîtés, et fournissant des solutions des problèmes de Plateau asymptotiques associés à $\{\Sigma_r^0\}$. Une adaptation sans douleur de la démonstration

précédente montre alors que la suite $\{\Sigma_r\}$ va converger vers une k -surface solution de notre problème. \diamond

7.2.2 Démonstration de la proposition 7.2.3

Preuve : Soit Σ une k -surface éventuellement dégénérée et soit Σ_1 une k -surface qui est un graphe au dessus de Σ . Notons f , la fonction associée. Pour montrer que $\Sigma = \Sigma_1$, il nous suffit de montrer que f est bornée par une constante a . En effet, Σ et Σ_1 seront alors toutes les deux lentilles pour la surface S_a à distance a de Σ , et nous aurons l'unicité grâce à la proposition 6.2.1.

Montrons donc que f est bornée. Considérons comme d'habitude le bout B de Σ , et commençons par remarquer que dans le cas où Σ est complète, alors pour tout $y \in \Sigma$ de vecteur normal extérieur n et tout vecteur u tel que $\langle u, n \rangle > 0$, la géodésique issu de u reste tracée dans B . Cela reste vrai dans le cas d'une k -surface dégénérée : en effet une telle géodésique heurte transversalement en un temps fini une surface équidistante, et une telle surface est toujours complète.

En particulier, le cône $U_{\alpha_0}^{y,n}$ est inclus dans B , où α_0 est la constante de 7.1.2 et n désigne vecteur normal à y . Soit D_y l'unique solution du problème de Plateau asymptotique pour $\partial_\infty U_{\alpha_0}^{(y,n)}$ (cf 7.1.1), ce disque D_y est inclus dans $U_{\alpha_0}^{y,n}$, d'après 7.1.2 et en particulier dans B ; par 7.2.4, c'est donc le graphe d'une fonction f_y au dessus d'un ouvert U_y relativement compact de Σ .

Montrons que $f_y \geq f$. Dans le cas contraire, soit $V_y = \{z/f_y \geq f\}$. D'après la propriété de f_y sur U_y , V_y est compact. De plus les deux surfaces s'intersectant transversalement (à cause du principe du maximum géométrique) V_y est à bord lisse. Il est alors facile de voir que le graphe de f_y restreint à V_y est lentille pour celui de f , ce qui est impossible d'après 6.2.1.

Ainsi $f(y) \leq f_y(y)$, or $f_y(y) \leq \delta(\alpha, 0)$, où cette constante a été introduite en 7.1.2. \diamond

7.2.3 Démonstration de la proposition 7.2.2

Preuve : soient (f, S) et (g, S) deux solutions du problème de Plateau asymptotique pour (i, S) . Pour tout $y \in S$, soit D_y un disque ouvert tel que

$$i(D_y) \subset \partial_\infty U_{\alpha_0}^{(f(y), n_f(y))} \cap \partial_\infty U_{\alpha_0}^{(g(y), n_g(y))}$$

où n_f et n_g désignent les champs de vecteurs normaux extérieurs associés à f et g respectivement.

Soit alors S_y l'unique solution du problème de Plateau asymptotique pour (i, D_y) produite par le lemme 7.1.1. D'après la proposition 7.2.4, S_y est le graphe de fonctions f_y et g_y au dessus de (f, D_y) et (g, D_y) respectivement.

Considérons un recouvrement localement fini de S par des D_y où y décrit un ensemble Y . Et soit $f_0 = \inf(f_y)$, $y \in Y$ et $g_0 = \inf(g_y)$, $y \in Y$. Par construction le graphe de f_0 et celui de g_0 sont les mêmes. Nous avons ainsi construit une surface intermédiaire S_2 qui est un graphe à la fois au dessus de (f, S) et au dessus de (g, S) . Cette surface convexe n'a pas de raison d'être lisse.

Remplaçons cette surface S_2 par la surface S_3 à distance r de S_2 , pour r bien choisi, indépendamment de S_2 , S_3 est à courbure strictement supérieure à k . A nouveau, S_3 est une graphe au dessus de (f, S) et (g, S) .

Identifions comme d'habitude S_3 au disque D_1 de rayon 1 de \mathbb{C} . Soit D_r les disques de rayon r , et Σ_r les solutions du problèmes de Plateau pour D_r . Pour r petit, Σ_r est un graphe à la fois au dessus de (f, S) et (g, S) . Ceci est également vrai par continuité pour tout r , les k -surfaces (f, S) et (g, S) faisant office de barrière.

Quand r tend vers l'infini la suite de surfaces $\{\Sigma_r\}$ tend vers une k -surface Σ_0 . Pour voir cela il suffit d'invoquer le même raisonnement qu'en 7.2.1 . 1.(iv). \diamond

7.3 Existence

Nous voulons démontrer nos théorèmes d'existence de solutions du problème de Plateau asymptotique

Théorème 7.3.1 *Soit S une surface compacte de genre plus grand que 2, ρ une représentation de Γ dans le groupe des isométries de M , f un homéomorphisme local de \bar{S} , le revêtement universel de S dans $\partial_\infty M$ équivariante sous ρ , alors il existe une unique solution non dégénérée du problème de Plateau asymptotique pour (f, \bar{S}) et cette solution est équivariante sous ρ .*

Théorème 7.3.2 *Soit f un homéomorphisme local de U dans $\partial_\infty M$ et soit S un ouvert relativement compact de U , alors il existe une unique solution au problème de Plateau asymptotique pour (f, S)*

Nous montrerons également ce qui peut-être conçu comme une généralisation faible du petit théorème de Picard.

Théorème 7.3.3 *Soit f un homéomorphisme local de S dans $\partial_\infty M$ évitant trois points. Alors, il existe une solution non dégénérée du problème de Plateau asymptotique pour (f, S) .*

Pour démontrer nos deux théorèmes d'existence, nous allons à chaque fois construire une surface convexe immergée dans M et dont l'application de Gauss-Minkowski définit le un problème de Plateau asymptotique. Nous construirons cette surface en recollant des surfaces obtenues comme solution des problèmes de Plateau asymptotiques pour des disques plongés.

Les deux premiers théorèmes vont chacun utiliser des lemmes ayant leur intérêt propre. Pour le premier, il nous faudra le

Lemme 7.3.4 *Soit S une surface complète, qui n'est ni tubulaire, ni horosphérique à l'infini, et soit N son application de Gauss Minkowski à valeurs dans $\partial_\infty M$, alors le problème de Plateau asymptotique (N, S) admet une solution. Si de plus, S n'est pas tubulaire à l'infini, cette k -surface n'est pas dégénérée*

Pour le deuxième, nous utiliserons le

Lemme 7.3.5 *Soit V une surface sans bord, pas nécessairement complète, immergée de façon localement convexe dans M . Soit N son application de Gauss-Minkowski à valeurs dans ∂_∞ , soit $S \subset U$ un ouvert relativement compact. alors le problème de Plateau asymptotique (N, S) admet une solution.*

7.3.1 Démonstration du lemme 7.3.4

Preuve :soit S_1 la surface à distance r de S , cette surface n'est évidemment ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire. Pour r bien choisi, cette surface est à courbure strictement plus grande que k . De plus, toute solution de (N, S_1) est une solution de (N, S) . Il est maintenant facile de vérifier que la k -surface lentille pour S_1 , produite par le lemme de Morse est une solution du problème de Plateau asymptotique.◊

7.3.2 Démonstration du lemme 7.3.5

Preuve :nous allons chercher à produire la solution du problème de Plateau asymptotique comme limite de problèmes de Plateau, comme dans la preuve de la proposition 7.2.4.

Examinons tout d'abord le cas où S est un ouvert relativement compact à bord lisse. Considérons S_r les surfaces à distance r de S , et Σ_r les surfaces lentilles solutions du problème de Plateau pour S_r . Pour adapter la démonstration de 7.2.4 il nous suffit de faire la remarque suivante. Nous savons que, par définition des surfaces lentilles $S = S_0$ est un graphe au dessus d'un ouvert O du fibré normal étendu N_{Σ_0} . Si Σ_r n'a pas de raisons d'être un graphe au dessus de Σ_0 , les arguments de 7.2.1.1.(i), montre qu'elle sera un graphe au dessus de ce même ouvert O .

Le reste de la preuve, c'est-à-dire les points (ii), (iii), (iv), et (v) s'adapte sans problème et nous permettent de construire une solution du problème de Plateau pour (N, S) .

Enfin dans le cas où S n'est pas à bord lisse, il nous suffit de construire \bar{S} à bord lisse relativement compact et contenant S . Ce que nous venons de dire nous permet de construire une solution du problème de Plateau asymptotique pour (N, \bar{S}) et l'application directe de la proposition 7.2.4 permet de conclure. \diamond

7.3.3 Démonstration du théorème 7.3.1

Preuve : par compacité, nous pouvons trouver des disques fermés D_i , $i \in J$, dont les intérieurs recouvrent \bar{S} le revêtement universel de S , et vérifiant, si nous notons

$$I_i = \{j \in I, D_i \cap D_j \neq \emptyset\}$$

les hypothèses suivantes

- (a) Pour tout i , le cardinal de I_i est fini,
- (b) $D_i \not\subset \bigcup_{j \in I_i \setminus \{i\}} D_j$,
- (c) Pour tout i , il existe un disque Δ_i contenant $\bigcup_{j \in I_i} D_j$, tel que f restreinte à Δ_i soit un plongement,
- (d) la famille $\{D_i\}$ est Γ -équivariante.

D'après le lemme 7.1.1, nous pouvons construire des solutions S_j de chacun des problèmes de Plateau asymptotiques défini par (f, D^j) . Chacune de ces surfaces S_j découpe M en deux parties dont l'une est convexe. Nous appellerons cette composante convexe C_j .

Remarquons maintenant que les hypothèses (a), (b) et (c) entraînent l'assertion suivante :

- (e) si $j, k \in I_i$, alors $S_j \cap S_k \neq \emptyset$ entraîne $D_j \cap D_k \neq \emptyset$.

En effet, soit Σ_i la solution du problème de Plateau asymptotique pour Δ_i définie par (d). D'après la proposition 7.2.4, S_j est alors un graphe au dessus de $N^{-1}(D_j) \subset \Sigma_i$ d'où (e).

Soit maintenant

$$U_i = \bigcap_{j \in I_i} C_j.$$

Cet ensemble U_i est convexe. Son bord est la réunion de facettes. Parmi celles ci, nous distinguerons $F_i = S_i \cap \partial U_i$. La facette F_i est une surface, non vide d'après

(b) dont le bord est une réunion d'arcs C^∞ pas nécessairement connexes, $\gamma_{(i,j)}$, $j \in I_i$, portions de $S_j \cap S_i$.

Plus précisément encore

$$\gamma_{(i,j)} = S_j \cap S_i \cap U_i,$$

nous avons même, d'après (e)

$$\gamma_{(i,j)} = S_j \cap S_i \bigcap_{k \in I_i \cap I_j} C_k.$$

En particulier $\gamma_{(i,j)} = \gamma_{(j,i)}$.

Nous pouvons maintenant recoller F_j avec F_i le long de $\gamma_{(i,j)}$, et obtenir ainsi de proche en proche une surface F localement convexe, que nous nous empressons de lisser, de manière C^1 , en prenant la surface Σ à distance r , et que nous appelons Σ . Il est maintenant clair que le problème de Plateau asymptotique défini par (N, Σ) , où N est l'application de Gauss-Minkowski, est équivalent à notre problème de départ.

Nous voulons appliquer notre lemme 7.3.4. Nous allons montrer que Σ est à géométrie bornée et n'est ni tubulaire à l'infini, ni horosphérique à l'infini.

Comme l'action de Γ sur Σ est cocompacte, il suffit bien évidemment de montrer que Σ n'est ni tubulaire, ni horosphérique.

Si Σ était horosphérique, alors par définition Γ agirait de manière cocompacte sur une horosphère. Mais ceci est impossible : avec nos hypothèses de géométrie bornée, la croissance des horosphères est polynomiales 2.3.2 (ii).

De même, si Σ était tubulaire, Γ agirait de manière cocompacte sur le fibré unitaire normal à une géodésique. Ceci est impossible : ce fibré est conforme au plan privé d'un point.

Le lemme 7.3.4 permet alors de conclure. \diamond

7.3.4 Démonstration du théorème 7.3.2

Preuve : nous allons procéder comme dans le paragraphe précédent. En effet, nos hypothèses nous permettent de contruire une famille finie de disques ouverts D_i vérifiant $i \in J$, dont les intérieurs recouvrent l'adhérence de S , et vérifiant, si nous notons

$$I_i = \{j \in I, D_i \cap D_j \neq \emptyset\}$$

les hypothèses suivantes

$$(b) \quad D_i \not\subset \bigcup_{j \in I_i \setminus \{i\}} D_j,$$

- (c) Pour tout i , il existe un disque Δ_i contenant $\bigcup_{j \in I_i} D_{i_j}$, tel que f restreinte à Δ_i soit un plongement,

D'après le lemme 7.1.1, nous pouvons construire des solutions S_j de chacun des problèmes de Plateau asymptotiques défini par (f, D^j) . Chacune de ces surfaces S_j découpe M en deux parties dont l'une est convexe. Nous appellerons cette composante convexe C_j .

Remarquons maintenant que les hypothèses (b) et (c) entraînent, comme dans le paragraphe précédent, l'assertion suivante :

- e si $j, k \in I_i$, alors $S_j \cap S_k \neq \emptyset$ entraîne $D_j \cap D_k \neq \emptyset$.

En procédant exactement comme dans le paragraphe précédent, nous obtenons une surface convexe Σ telle que le problème de Plateau asymptotique défini par (N, Σ) , où N est l'application de Gauss-Minkowski, est équivalent au problème de Plateau asymptotique $(N, \bigcup_{i \in J} D_i)$. L'ouvert S étant par hypothèse relativement compact dans $\bigcup_{i \in J} D_i$, le lemme 7.3.5 permet de conclure. \diamond

7.3.5 Démonstration du théorème 7.3.3

Preuve : soit donc i un homéomorphisme local de S dans $\partial_\infty M$ évitant trois points x_1, x_2 et x_3 .

Pour démontrer le résultat, il nous suffit que le problème de Plateau asymptotique (i, S_0) a une solution, où $S_0 = \partial_\infty \setminus \{x_1, x_2, x_3\}$ et i est l'injection. En effet, si cela est vrai, si (f, S) est un homéomorphisme local de S évitant x_1, x_2 et x_3 , nous pouvons relever f en une application \bar{f} de \bar{S} dans \bar{S}_0 , où \bar{S} et \bar{S}_0 désignent les revêtements universels de S et S_0 respectivement. La proposition 7.2.4 nous permet de construire une solution du problème de Plateau asymptotique pour $(\pi \circ \bar{f}, \bar{S})$ où π désigne la projection canonique de \bar{S}_0 dans S_0 . L'unicité 7.2.1 nous permet enfin de montrer que la solution ainsi obtenue est bien une solution de (f, S) .

Concentrons nous donc sur le cas de (i, S_0) . Distinguons deux cas.

(i) Premièrement supposons qu'il existe un triangle idéal T totalement géodésique dont les sommets sont nos trois points. La surface S_ϵ , bord de la boule de centre T et de rayon ϵ est alors à courbure plus grande que k pour un certain ϵ . Elle n'est de plus ni horosphérique à l'infini, ni tubulaire. Le lemme 7.3.4 nous affirme alors que la k -surface lentille pour S_ϵ produite par le lemme de Morse fournit une solution de notre problème de Plateau. Cette solution borde un convexe, elle va donc être complète, autrement dit la k -surface ainsi obtenue n'est pas dégénérée.

(ii) Plaçons nous dans le cas général maintenant. Soit $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une exhaustion de S_0 par des ouverts relativement compacts. Le théorème 7.3.2 nous permet de

construire pour tout n une solution (f_n, S_n) du problème de Plateau asymptotique pour (i, S_n) . Notre but est bien sûr de montrer que la suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge après extraction d'une sous suite.

Soit x un point appartenant à l'enveloppe convexe de $\{x_1, x_2, x_3\}$. Les surfaces $f_n(S_n)$ bordent des convexes C_n qui contiennent tous x et qui de plus sont tels que

$$n \geq p \Rightarrow C_p \subset C_n \quad (*).$$

Considérons

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

Dans le cas dans lequel nous nous sommes placé, l'intérieur de C est non vide. Soit donc x tel que la sphère S_a , de centre x et de rayon a , soit incluse dans C . Identifions cette sphère canoniquement à $\partial_\infty M$.

Les surfaces $f_n(S_n)$ sont maintenant des graphes au-dessus de S_n , vus comme sous-ensembles de S_a de fonctions λ_n . Par (*), pour tout y , la suite $\{\lambda_n(y)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Nous pouvons en conclure, en utilisant le corollaire 4.1.3, que la suite de fonctions $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge C_∞ vers une fonction λ dont le graphe va nous fournir la solution de notre problème de Plateau (i, S_0) . \diamond

7.4 Non existence

Le théorème suivant montre qu'il n'y a pas toujours des solutions au problème de Plateau asymptotique

Théorème 7.4.1 *Si U est $\partial_\infty M$ privée de 0, 1 ou 2 points. Le problème de Plateau asymptotique défini par (i, U) , où i est l'injection canonique, n'a pas de solutions.*

Preuve : raisonnons par l'absurde. Dans les trois cas, la solution serait une surface Σ globalement convexe.

Dans le premier cas, une telle surface serait une sphère compacte ce qui est clairement impossible puisque par l'équation de Gauss, la métrique induite sur une k -surface est à courbure négative.

Dans le deuxième cas, Σ est une pseudo-horosphère, d'après 2.4.1 elle est alors horosphérique à l'infini. Il existe donc une suite de points $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Σ telle que $\{(\Sigma, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une surface horosphérique Σ_0 . Mais ceci est impossible, car par compacité Σ_0 est également une k -surface et une k -surface ne peut-être horosphérique à cause du principe du maximum géométrique.

Dans le dernier cas, soit γ la géodésique joignant les deux points du bord à l'infini et soit μ la fonction distance à cette géodésique. Soit ensuite x_n une suite de points de Σ tendant vers le maximum μ_0 de μ . Nous pouvons extraire une sous suite telle que (Σ, x_n) converge vers Σ_0 .

Mais μ_0 ne peut-être borné, puisqu'alors Σ_0 serait tangente intérieurement à une équidistante à une géodésique, ce qui est impossible par le principe du maximum géométrique.

De même, μ_0 ne peut-être infini, car dans ce cas la surface Σ_0 serait une pseudo-horosphère, et nous venons de voir que c'est impossible. \diamond

8 Espace des k -surfaces

Abusivement, nous considérerons une k -surface comme une surface immergée dans le fibré unitaire de la variété M , par son relevé de Gauss, c'est-à-dire l'application qui à un point de la surface associe sa normale extérieure.

Soyons un peu plus précis dans la définition d'une k -surface pour éviter le problème des revêtements multiples.

Les k -surfaces étant les solutions d'un problème elliptique, toute telle surface est totalement déterminée par son jet d'ordre infini en un point. On en déduit qu'étant donnée une k -surface (f, S) sans bord, f désigne une immersion de S dans le fibré unitaire, il existe un *représentant minimal* de la k -surface (g, Σ) , tel que pour tout k -surface (\bar{f}, \bar{S}) ayant la même image que f (c'est-à-dire $f(S) = \bar{f}(\bar{S})$), alors il existe un revêtement p de \bar{S} sur Σ , tel que $\bar{f} = g \circ p$.

le représentant minimal d'une k -surface est totalement déterminé par son image, et nous ommetrons souvent de parler de l'immersion sous-jacente.

L'*espace des k -surfaces* \mathcal{N} d'une variété N est l'espace des paires (S, x) , où $x \in S$, et où S est soit un tube, soit le représentant minimal k -surface sans bord éventuellement dégénérée.

Cet espace \mathcal{N} est munie d'une topologie décrite dans [3], pour laquelle la notion de convergence est celle des sous-variétés immergées pointées décrites en 5.3.1.

Nous avons montré que dans la section 8.1 de [3] que l'espace \mathcal{N} était compact et muni d'une structure de lamination, c'est à dire de produit local. Une feuille \mathcal{L}_S de cette lamination est décrite par S qui est soit le représentant minimal d'une k -surface, soit un tube; les points de cette feuille \mathcal{L}_S sont alors tous les points de la forme (S, x) où x décrit les points de S .

9 Densité des feuilles périodiques

A partir de maintenant, N désignera une variété compacte à courbure strictement négative et M sera son revêtement universel.

Soit \mathcal{N} l'espace compact laminé associé décrit en 8. Nous voulons montrer

Théorème 9.0.2 *L'ensemble de feuilles compactes est dense dans \mathcal{N}*

Les feuilles compactes de \mathcal{N} sont par définition les immersions localement convexes d'une surface compacte dans N , et dont les images sont des k -surfaces. Nous pouvons interpréter ces surfaces compactes dans le revêtement universel de la manière suivante. Elles s'identifient aux quadruplets $(f, \Sigma, \Gamma, \rho)$, où

- (i) Γ est un groupe discret agissant de manière cocompacte sur Σ ;
- (ii) ρ est une représentation de Γ dans $\pi_1(N)$;
- (iii) f est une immersion ρ -équivariante, localement convexe du disque Σ dans M , et dont l'image est une k -surface.

Introduisons une autre définition, un quadruplet $(f, \Sigma, \Gamma, \rho)$ est une *immersion équivariante* à valeurs dans $\partial_\infty M$, si Σ est une surface, éventuellement à bord, Γ est un groupe agissant sur Σ de façon à ce que le quotient soit une surface, f est un homéomorphisme local de Σ dans $\partial_\infty M$, ρ est une représentation de Γ dans $iso(M)$ le groupe des isométries de M . L'ensemble devant vérifier la relation d'équivariance c'est-à-dire

$$\forall s \in \Sigma, \forall g \in \Gamma, f(g.s) = \rho(g).f(s).$$

Une immersion équivariante est *cocompacte* si Σ/Γ est une surface compacte.

D'après le théorème 7.3.1, les feuilles compactes de notre lamination s'identifient aux immersions équivariantes cocompactes.

Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que dans la démonstration que nous allons donner, $\rho(\Gamma)$ sera toujours un groupe libre.

La structure de cette section est la suivante.

Dans un premier paragraphe (9.1 .), nous introduisons une définition, l'inclusion des données asymptotiques, et démontrons un lemme de compacité s'y rapportant.

Nous expliquons ensuite (en 9.2 .) comment associer à un plongement du disque une suite d'immersions équivariantes l'approximant en un certain sens.

Le paragraphe suivant (9.3 .) montre comment construire de nouvelles immersions équivariantes à partir d'anciennes par un procédé de fusion.

Ensuite (en 9.4 .), nous introduisons une classe d'immersions topologiques du disque dans les sphères que nous appelons *quasi-plongement* et commençons par montrer que toute donnée asymptotique est limite de quasi-plongements.

En 9.5 . , nous montrons que tout quasi-plongement est limite de d'immersions équivariantes cocompactes : celles-ci sont obtenues par fusion d'immersions équivariantes construites en 9.2 .

Enfin, nous concluons la démonstration dans le dernier paragraphe.

9.1 Inclusion, lemme de compacité pour les inclusions

Dans ce qui suit, D_i désignera toujours une variété connexe de dimension 2 sans bord.

9.1.1 Inclusion

Introduisons encore une définition : si (f, D_1) et (g, D_2) sont deux données de problèmes de Plateau asymptotiques, nous dirons que (f, D_1) est *inclus* dans (g, D_2) par i , et noterons

$$(f, D_1) \subset (g, D_2) \quad [i]$$

s'il existe un plongement i de D_1 dans D_2 , tel que $f = g \circ i$.

La petite observation suivante nous sera utile :

- (i) soit x_1 et x_2 des points de D_1 et D_2 respectivement, si pour tout ouvert U relativement compact de D_1 , nous pouvons trouver i_U telle que (f, U) est inclus dans (g, D_2) par i_U de telle sorte que $i_U(x_1) = x_2$, alors (f, D_1) est inclus dans (g, D_2) .

9.1.2 Intersection

Plus généralement, si $\{(f_n, D_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de problèmes de Plateau asymptotiques, si (g, D_∞) est un autre problème de Plateau asymptotique, inclus dans tous les (f_n, D_n) par i_n , nous dirons que (g, D_∞) est *l'intersection des* (f_n, D_n) *le long de* i_n , et nous noterons

$$(g, D) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f_n, D) \quad [i_n]$$

si toute donnée (h, U) (où U est connexe), incluse pour tout n dans (f_n, D_n) pour tout n par j_n et vérifiant de plus

$$(g, D_\infty) \subset (h, U) \quad [j]$$

où j vérifie $i_n = j_n \circ j$, alors $(h, U) = (g, D)$. On vérifie la proposition suivante

Proposition 9.1.1 *Supposons que*

$$(g, D) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f_n, D) \quad [i_n].$$

Soit par ailleurs, (h, U) telle que, pour tout n

$$(h, U) \subset (f_n, D) \quad [j_n].$$

Supposons qu'il existe $x_0 \in D$ et $x_1 \in U$ tels que pour tout n , $i_n(x_0) = j_n(x_1)$. Alors

$$(h, U) \subset (g, D) \quad [j],$$

de telle sorte que $j_n = i_n \circ j$.

9.1.3 Limite inférieure

Enfin, nous dirons que (g, D_∞) est la *limite inférieure* des (f_n, D_n) par i_n et nous noterons

$$(g, D_\infty) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (f_n, D_n) \quad [i_n],$$

si pour toutes les sous-suites $s(n)$, il existe p tel que

$$(g, D_\infty) = \bigcap_{n > p} (f_{s(n)}, D_{s(n)}) \quad [i_{s(n)}].$$

Il faut faire un petit peu attention avec ces notions : si en effet nous considérons la suite décroissante d'ouvert $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue en enlevant les uns après les autres les points d'un ensemble dénombrable dont l'adhérence est un équateur, et si f_n est la représentation conforme envoyant zéro sur le pôle nord, nous avons, suivant le choix de nos intersections deux intersections des $\{(f_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$: la représentation de l'hémisphère nord et celle de l'hémisphère sud.

9.1.4 Encore un lemme de compacité

Nous voulons montrer le

Lemme 9.1.2 Soit $\{(f_n, D)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de problèmes de Plateau asymptotiques, admettant des solutions $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et x_0 un point de D ; soit également une donnée asymptotique

$$(g, D) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (f_n, D_n) \quad [i_n].$$

Alors, la suite de k -surfaces $\{(\phi_n, D)\}_{n \in \mathbb{N}}$, pointées en $\{i_n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, converge vers une solution du problème de Plateau asymptotique pour (g, D) .

Preuve : pour simplifier, nous nous noterons $0 = x_0 = i_n(x_0)$. Soit ψ la solution du problème de Plateau asymptotique défini par (g, D) . Cette solution existe bien d'après le théorème 7.3.2.

Nous savons (cf 7.2.4) que, pour tout n , $\psi(D)$ est un graphe au dessus d'un ouvert de $\phi_n(D)$.

Notre première étape consiste à démontrer l'assertion :

- (1) la suite $\{\phi_n(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ reste à distance bornée de $\psi(0)$.

Raisonnons par l'absurde. Dans le cas contraire, il existe une sous-suite $s(n)$ telle que $\phi_{s(n)}(0)$ converge vers un point m de $\partial_\infty M$.

Alors pour tout voisinage U de m , pour n suffisamment grand, si N_n désigne l'application de Gauss-Minkowski de $\phi_{s(n)}$ et B_n la boule de rayon 1 de centre $\phi_{s(n)}(0)$ tracée sur $\phi_{s(n)}(D)$, nous avons

$$\partial_\infty M \setminus U \subset N_n(B_n).$$

En particulier, $(i, \partial_\infty M \setminus U)$ est inclus dans les $(f_{s(n)}, D)$ pour tous les n suffisamment grand et ainsi dans (g, D) , par 9.1.1.

Maintenant, d'après notre observation préliminaire (9.1.1), nous pouvons conclure que $(i, \partial_\infty M \setminus \{m\})$ est inclus dans (g, D) . Nous avons là notre contradiction, car le théorème 7.3.2 fournirait alors une solution du problème de Plateau asymptotique pour $(i, \partial_\infty M \setminus \{m\})$, ce qui est impossible d'après 7.4.1.

Nous avons fini de démontrer l'assertion (1).

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer notre théorème de compacité 4.1.1 dans notre cas particulier où il n'y a pas de condition sur le bord. Extrayons donc une sous-suite $s(n)$ telle que nous ayons l'alternative :

- (a) soit $\{\phi_{s(n)}(D), \phi_{s(n)}(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une k -surface (peut-être dégénérée) S ,
- (b) soit $\{n \circ \phi_{s(n)}(D), n \circ \phi_{s(n)}(0)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un tube (nécessairement complet) autour d'une géodésique γ joignant deux points à l'infini γ_+ et γ_- . Ici, bien sûr n désigne, l'application de Gauss de la surface (ici, $\phi_n(D)$) à valeurs dans le fibré unitaire de M .

Dans les deux cas de cette alternative, nous obtenons naturellement associée à la limite une donnée de problème de Plateau asymptotique (f, D) : l'application de Gauss-Minkowski de la surface limite dans le premier cas, le revêtement universel de la sphère moins deux points dans l'autre cas.

Par convergence uniforme sur tout compact, nous en déduisons que pour tout ouvert relativement compact U de D , nous obtenons que (f, U) est inclus dans $(f_{s(n)}, D)$, pour tout n suffisamment grand et donc dans (g, D) , par définition de limite inférieure.

Grâce à notre observation préliminaire, nous en déduisons que (f, D) est inclus dans (g, D) .

En particulier, le deuxième cas de l'alternative est exclus : en effet, le théorème 7.3.2 entraînerait alors une solution du problème de Plateau défini par la sphère moins deux points, ce qui est impossible par 7.4.1.

Enfin, prenons un ouvert relativement compact U de D . Par convergence uniforme sur tout compact, nous en déduisons que (g, U) est inclus dans (f, D) . Ainsi, (g, D) est inclus dans (f, D) .

En conclusion, $(g, D) = (f, D)$ et, par unicité de la solution d'un problème de Plateau asymptotique 7.2.1, nous en déduisons que $\{\phi_{s(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ψ . \diamond

9.2 Construction de groupes

Nous allons dans un premier temps exhiber des groupes associés à des plongements du disque.

Pour tout $\gamma \in \pi_1(N)$ différent de l'identité, γ^+ et γ^- désigneront respectivement les points attracteurs et répulseurs de γ sur $\partial_\infty M$.

Si F est un sous-groupe de $\pi_1(N)$, nous noterons $\Lambda(F)$ son ensemble limite et $\Omega(F) = \partial_\infty \setminus \Lambda(F)$ son ensemble de discontinuité. Nous dirons que F est *convexe cocompact* si F agit de manière cocompacte sur $\Omega(F)$.

La proposition que nous allons énoncer va être assez technique.

Proposition 9.2.1 *Donnons nous (f, D) un plongement du disque dans $\partial_\infty M$ et x_i^\pm des points de $f(\partial D)$. Soit maintenant de plus, $\{\gamma_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $i \in \{1, \dots, p\}$, p suites d'éléments de $\pi_1(N)$, telles que*

(i) *les suites $\{\gamma_{i,n}^\pm\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers x_i^\pm ,*

(ii) *$\forall i, n, \gamma_{i,n}^\pm \notin f(D)$.*

Il existe alors une suite de groupes libres convexes cocompacts $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$(1) \quad \forall n, \exists q, \forall i, \gamma_{i,n}^q \in F_n,$$

$$(2) \quad \forall \gamma \in F_n \setminus \{\text{id}\}, \quad \gamma(f(D)) \cap f(D) = \emptyset$$

$$(3) \quad (f, D) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (i_n, \Omega(F_n)) \quad [f \circ i_n^{-1}],$$

où i_n désigne l'injection canonique de $\Omega(F_n)$ dans $\partial_\infty(M)$

Preuve : munissons $\partial_\infty M$ d'une métrique arbitraire, fixons un entier n et soit ε le réel strictement positif (à cause de (ii)) défini par

$$\varepsilon = \text{Sup}\{d(\gamma_{i,n}^\pm, x_i^\pm)\}.$$

Par hypothèse ε tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Par densité des géodésiques périodiques, il existe des éléments de $\pi_1(N)$, $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, où k est un nombre fini dépendant de n , tels que l'ensemble

$$L = \{\lambda_i^+, \lambda_i^-; 1 \leq i \leq k\}$$

soit ε -proche pour la distance de Hausdorff de $f(\partial D)$ et à l'extérieur de $f(D)$. On peut enfin s'arranger pour que tous les points de L soient distincts et que $l_i = \gamma_{i,n}$, $\forall i \in \{1, \dots, p\}$.

Par l'argument ping-pong classique, il existe q suffisamment grand tel que le groupe

$$F_n = \langle \lambda_1^q, \dots, \lambda_k^q \rangle$$

soit libre et agisse de manière cocompacte sur son ensemble de discontinuité.

On peut de plus s'arranger en prenant q suffisamment grand pour que son ensemble limite Λ_n soit dans un ε voisinage de L , et à l'extérieur de $f(D)$.

Toujours en prenant q suffisamment grand, on obtient la condition (2).

Pour achever la démonstration de la proposition, il nous suffit de remarquer que Λ_n est une suite de compacts convergeant pour la métrique de Hausdorff vers le bord de $f(D)$, tout en restant à l'extérieur de $f(D)$, et qu'ainsi nous avons bien

$$(f, D) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (i_n, \Omega(F_n)) \quad [f \circ i_n^{-1}],$$

ce que nous voulions démontrer \diamond

Nous avons déjà tout en main pour montrer que chaque plongement du disque est limite d'immersions équivariantes cocompactes : il nous suffit de mettre ensemble la proposition précédente et le lemme de compacité 9.1.2

Malheureusement, toute immersion n'est pas limite de plongement. Il nous faut donc raffiner notre construction et donner une procédure, que nous appellerons *fusion*, permettant de construire de nouvelles immersions équivariantes cocompactes, et montrer que celle ci permet d'approximer ce que nous appellerons des *quasi-plongements* qui eux vont s'avérer dense dans les immersions.

9.3 Fusion de groupes et de surfaces

Nous allons expliquer dans ce paragraphe une construction permettant de construire de nouveaux problèmes de Plateau équivariants à partir d'anciens.

La procédure que nous allons décrire est donnée par la construction suivante. Introduisons tout d'abord nos notations et hypothèses.

Soient $(f_i, S_i, \Gamma_i, \rho_i)$, où $i \in \{1, 2\}$, deux immersions équivariantes. Nous supposons ici que les S_i/Γ_i sont des surfaces à bord. Soient c_1 et c_2 deux composantes connexes du bord respectivement de S_1/Γ_1 et S_2/Γ_2 . On suppose qu'il existe deux relevés v_i de ces courbes dans S_i , associés à des éléments $\gamma_i \in \Gamma_i$ tels que $\rho_1(\gamma_1) = \rho_2(\gamma_2)$ ainsi qu'un homéomorphisme j entre v_1 et v_2 , vérifiant

$$\forall s \in v_2, \quad f_1 \circ j(s) = f_2(s)$$

ainsi que

$$\gamma_2 \circ j = j \circ \gamma_1.$$

En particulier j descend en un homéomorphisme h entre c_1 et c_2 . Notre construction découle alors de l'immédiate proposition suivante :

Proposition 9.3.1 *Avec les hypothèses et notations précédentes, il existe une unique immersion équivariante $(f, \Sigma, \Gamma, \rho)$ telle que $\Sigma/\Gamma = \Sigma_1/\Gamma_1 \cup_h \Sigma_2/\Gamma_2$ et, si ι_i est l'injection de Σ_i dans Σ qui se déduit de cette identification, alors $f \circ \iota_i = f_i$.*

Preuve : il s'agit d'une construction standard \diamond

L'immersion équivariante ainsi construite sera appelée *fusion* des deux immersions équivariantes précédentes.

On peut remarquer alors que Γ est un produit amalgamé de Γ_1 et Γ_2

Nous verrons plus tard comment la fusion se comporte vis-a-vis de l'opération limite inférieure.

9.4 Quasi-plongements

Introduisons une définition intermédiaire.

Un homéomorphisme local f du disque ouvert D dans $\partial_\infty M$ sera appelé un *quasi-plongement*, si f se prolonge continuellement en un homéomorphisme local de l'adhérence de D , et s'il existe une famille finie d'arcs plongés $\{c_i\}$, $1 \leq i \leq q$ deux à deux disjoints, dont les extrémités sont dans ∂D , et telle que f s'étend en un plongement de l'adhérence de chaque composante connexe de

$$D \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq q} c_i.$$

Nous appellerons la famille d'arcs de la définition, *découpe* du quasi-plongement.

En un certain sens, le résultat suivant affirme que tout homéomorphisme local est limite de quasi-plongements.

Proposition 9.4.1 *Soit f un homéomorphisme local de D dans $\partial_\infty M$, alors pour tout ouvert relativement compact U de D il existe un ouvert relativement compact V inclus dans D contenant U tel que (f, V) soit un quasi-plongement*

Preuve : nous allons utiliser des idées contenues dans la paramétrisation faite par Thurston de l'espace des \mathbb{CP}^1 -structures par les laminations géodésiques mesurées. Notre méthode va être laborieuse, et nous aimerions savoir s'il y a plus simple.

Identifions $\partial_\infty M$ à la sphère S^2 . Munissons S^2 d'une métrique à courbure constante et D de la métrique induite par f . Nous noterons \bar{D} sa complétion métrique et $Fr(D) = \bar{D} \setminus D$. Au besoin, en restreignant un peu D , nous pouvons supposer que \bar{D} est homéomorphe au disque fermé et que f s'étend en un homéomorphisme local de \bar{D} dans S^2 .

Une boule métrique ouverte de D sera appelée une *bonne boule*, si f est une isométrie de cette boule sur une boule de S^2 . Une boule sera *maximale*, si c'est une bonne boule et si elle n'est incluse dans aucune autre bonne boule qu'elle même.

Si B est une boule maximale, nous noterons \bar{B} son adhérence dans D (et non dans \bar{D}) et $Fr(B)$ l'ensemble $\bar{B} \setminus B$. Cet ensemble $Fr(B)$ est une réunion d'intervalles ouverts. Un peu de géométrie sphérique montre que si deux points de $Fr(B)$ sont dans une même composante connexe de $Fr(B)$, alors ils sont inclus dans une même bonne boule.

Nous dirons enfin que deux points x et y de $Fr(D)$ sont *joignables*, s'il existe une boule maximale B et une composante connexe A de $Fr(B)$ telle que x et y appartiennent tous deux à l'adhérence de A dans \bar{D} .

Reamarquons que si x_1 et x_2 sont joignables de même que y_1 et y_2 avec $y_i \neq x_j$, alors y_1 et y_2 sont tous les deux inclus dans la même composante connexe de $Fr(D) \setminus \{x_1, x_2\}$. Explicitons ce raisonnement. Notons B_x et B_y les bonnes boules respectives pour les paires (x_1, x_2) et (y_1, y_2) , ainsi que A_x et A_y les composantes connexes de $Fr(B_x)$ et $Fr(B_y)$ qui s'en déduisent. Il est clair que A_x et A_y étant des portions de cercles ne peuvent s'intersecter en une infinité de points car elles seraient alors confondues. De plus, y_1 et y_2 sont dans des composantes connexes différentes de $Fr(D) \setminus \{x_1, x_2\}$, nous en déduisons que A_x et A_y se rencontrent transversalement en exactement un point, puisque deux cercles ne peuvent se rencontrer en plus de

deux points. Mais alors, l'une des extrémités de A_x (c'est-à-dire x_1 et x_2) serait inclus dans l'intérieur de B_y d'où la contradiction.

Si maintenant x et y sont deux points joignables correspondant à une boule maximale B (pas nécessairement unique d'ailleurs), traçons entre x et y la géodésique pour la métrique hyperbolique conforme de B . L'arc correspondant sera appelée *bon arc*. Un raisonnement géométrique élémentaire montre que deux bons arcs ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités.

La réunion \mathcal{L} des bons arcs forme un ensemble fermé et nous avons construit ainsi une lamination de D .

Cette construction n'est bien sûr pas originale, c'est celle qui associe à toute \mathbb{CP}^1 -structure une lamination comme dans la construction de Thurston déjà citée.

On remarque aisément que si A est le complémentaire de \mathcal{L} , toute composante connexe de A est inclus dans une bonne boule.

Nous pouvons maintenant construire une exhaustion de D par des disques compacts D_n telle que toute intersection non vide d'un bon arc avec D_n soit connexe et de longueur minorée par une constante ne dépendant que de n : par exemple, on peut trouver une métrique hyperbolique telle que la lamination soit géodésique, puis prendre une exhaustion par des convexes, et enfin éventuellement découper ces convexes en enlevant la "petite" composante connexe du complémentaire des bons arcs de petite longueur.

Fixons ensuite l'un des D_p ; nous voulons montrer que f restreinte à D_p est un quasi-plongement.

Pour cela, il nous suffit de contruire un recouvrement de D_p tel que tout ouvert de ce recouvrement est bordé par une courbe de Jordan contituée d'un nombre fini de bons arcs et d'arcs inclus dans le bord de D_p , et tel qu'il existe une découpe de cet ouvert par des bons arcs pour laquelle la restriction de f à cet ouvert soit un quasi-plongement. En effet, lorsque l'on aura extrait un recouvrement fini par de tels ouverts, la famille de bons arcs inclus dans le bord de ces ouverts et provenant des découpes de ces mêmes ouverts, nous donnera une découpe de quasi-plongement.

Ce recouvrement est aisé à construire : nous avons quatre cas à considérer.

(1) Si $x \in A = D \setminus \mathcal{L}$, nous prenons simplement la composante connexe de x dans $A \cap D_p$. Le longueur de la trace des bons arcs sur D_p étant minorée, il n'y a qu'un nombre fini de bons arcs dans le bord de cette composante connexe.

(2) Si x se trouve sur un bon arc isolé. Ce bon arc sépare deux composantes connexes de A . Nous prenons alors comme ouvert la réunion de ces composantes connexes, avec la découpe donné par le bon arc passant par x .

(3) Si x se trouve sur un bon arc c associé à une boule maximale B , isolé d'un côté mais pas de l'autre, c'est à dire si ce bon arc borde une composante O connexe

de A , et s'il existe une suite $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'arcs distincts de c tendant vers c . Dans ce cas, nous pouvons remarquer que pour n suffisamment grand, la région U_n bordé par c et c_n est telle que $U_n \cap D_p$ est incluse dans B . Nous pouvons alors prendre comme ouvert $(O \cup U_n \cup c) \cap D_p$ qui est inclus dans B .

(4) Le dernier cas correspond au cas x appartient à un bon arc c et où nous pouvons trouver deux suites de bons arcs tendant vers c , $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, telles que la région U_n comprise entre c_n et g_n contienne c . Il nous suffit de remarquer que pour n suffisamment grand $U_n \cap D_p$ est inclus dans B , et de prendre enfin comme ouvert $U_n \cap D_p$.

Notre laborieuse construction est terminée. \diamond

9.5 Quasi-plongements et immersions équivariantes cocompactes

Le résultat essentiel de cette section est une généralisation de 9.2.1 au cas des quasi-plongements.

Proposition 9.5.1 *Soit (f, D) un quasi-plongement, il existe alors une suite d'immersions équivariantes cocompactes $\{(f_n, S_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ telles que*

$$(f, D) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (f_n, S_n) \quad [i_n].$$

Preuve : soit donc (f, D) un quasi-plongement. D'après la définition, il existe une famille finie d'arcs plongés $\{c_i\}$, $1 \leq i \leq q$ deux à deux disjoints, dont les extrémités sont dans ∂D , et telle que f s'étend en un plongement de l'adhérence de chaque composante connexe D_j de

$$D_c = D \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq q} c_i.$$

Orientons les arcs c_i , notons x_i^\pm leurs extrémités et D_{i^\pm} les composantes connexes de D_c bordées par c_i .

Par densité des géodésiques périodiques, nous pouvons trouver des suites $\{\gamma_{i,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\pi_1(N)$ telles que

- (i) les suites $\{\gamma_{i,n}^\pm\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers $f(x_i^\pm)$
- (ii) $\forall i, n \quad \gamma_{i,n}^\pm \notin f(D_{i^\pm})$.

D'après le lemme 9.2.1, nous pouvons alors trouver pour toute composante D_j de D_c une suite de groupes libres convexes cocompacts $\{F_{j,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant, si c_i est dans le bord de D_j ,

$$(iii) \quad \forall n, \quad \exists q, \quad \gamma_{i,n}^q \in F_{j,n},$$

ainsi que

$$(iv) \quad \forall \gamma \in F_{j,n} \setminus \{id\}, \quad \gamma(f(D_j)) \cap f(D_j) = \emptyset$$

et

$$(v) \quad (f, D_j) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (p_{j,n}, D).$$

Ici $p_{j,n}$ désigne la projection du revêtement universel de $\Omega(F_n)$ identifié à D et vérifiant $p_n(0) = y_j$, où y_j est un point arbitraire de D_j .

Pour tout j, n , notons alors $\bar{S}_{j,n}$ la surface compacte

$$\bar{S}_{j,n} = \Omega(F_{j,n}) / F_{j,n}$$

et $\pi_{j,n}$ la projection naturelle de $\Omega(F_{j,n})$ sur $\bar{S}_{j,n}$.

La condition (iv) nous assure que $\pi_{j,n} \circ f$ est un plongement de D_j dans $\bar{S}_{j,n}$.

Il nous est toujours loisible dans la construction précédente de prendre des sous-groupes d'indice finis des $F_{j,n}$. Nous avons par ailleurs une certaine liberté concernant le choix des générateurs des groupes $F_{j,n}$ autres que les γ_i .

Pour continuer notre démonstration, nous allons raffiner notre construction en utilisant la latitude que nous venons de décrire de telle sorte que les groupes $F_{j,n}$ vérifient les propriétés supplémentaires suivantes :

(vi) le groupe F_n engendré par la réunion des $F_{j,n}$ est lui-même convexe cocompact,

$$(vii) \quad f(c_i) \subset \Omega(F_n).$$

Choisissons maintenant, pour tout i, n , des voisinages $B_{i,n}^\pm$ de $\gamma_{i,n}^\pm$, homéomorphes à la boule fermée, disjoints deux à deux, tels que

$$(viii) \quad \gamma_{i,n}(\partial_\infty M \setminus B_{i,n}^-) \subset B_{i,n}^+,$$

$$(ix) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\text{diam}(B_{i,n}^\pm)) = 0,$$

et enfin, ces voisinages intersectent les images des c_i exactement en leurs extrémités

$$(x) \quad f(c_i) \cap B_{i,n}^\pm = f(x_i^\pm).$$

A nouveau, si besoin était, nous avons pris des sous-groupes d'indices finis des $F_{j,n}$.

Nous avons presque fini nos préliminaires. Pour les terminer, nous construisons pour tout entier n , et tout $j \in \{1, \dots, q\}$, une courbe $c_{i,n}$ tracée sur $\Omega(F_n)$ telle que

$$(xi) \quad f(c_i) \subset c_{n,i},$$

$$(xii) \quad \gamma_{i,n}(c_{i,n}) = c_{i,n},$$

et

$$(xiii) \quad c_{n,i} \setminus f(c_i) \subset B_{i,n}^+ \cup B_{i,n}^-.$$

Pour ce faire, il faut procéder de la manière suivante : nous savons par (viii) que $\gamma_{i,n}(f(c_i)) \subset B_{i,n}^+$. Par ailleurs, $B_{i,n}^+ \setminus B_{i,n}^-$ est connexe de même que son adhérence A . Par (x), cette adhérence A intersecte $f(c_i)$ exactement en $f(x_i^+)$ et $\gamma_{i,n}(f(c_i))$ en $\gamma_{i,n}(f(x_i^-))$. Choisissons donc un chemin plongé $\lambda_{i,n}$ joignant $f(x_i^+)$ et $\gamma_{i,n}(f(x_i^-))$ dans A . Nous pouvons alors prendre comme courbe $c_{i,n}$, la réunion des images itérées de l'arc $f(c_i) \cup \lambda_{i,n}$:

$$c_{i,n} = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \gamma_{i,n}^p(f(c_i) \cup \lambda_{i,n}).$$

(xiv) Enfin, en prenant éventuellement des sous-groupes d'indice fini des $F_{j,n}$, la condition (xiii) et le fait que les $B_{i,n}^\pm$ sont deux à deux disjoints, nous permettent d'assurer que, pour tout j et n , si c_{i_1}, \dots, c_{i_m} , sont tracées dans le bord de D_j , alors les courbes $\pi_{j,n}(c_{i_k,n})$ sont des courbes plongées et d'intersection vide dans $\tilde{S}_{j,n} = \Omega(F_n)/F_n$.

Rappelons qu'ici D_j est une composante connexe de

$$D \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq q} c_i.$$

Nous avons maintenant fini d'imposer des conditions supplémentaires aux groupes $F_{j,n}$ et pouvons continuer notre démonstration. Par la condition (iv), $\pi_{j,n} \circ f$

est un plongement de D_j dans

$$U_{j,n} = \bar{S}_{j,n} \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq m} \pi_{j,n}(c_{i_k,n}).$$

Notons donc $\Sigma_{j,n}$ la composante connexe de $U_{j,n}$ dans laquelle s'envoie D_j . Par construction, $\Sigma_{j,n}$ est une surface dont le bord s'identifie à la réunion des courbes $\pi_{j,n}(c_{i_k,n})$. Soit enfin $\Gamma_{j,n}$ le groupe fondamental de $\Sigma_{j,n}$, et $S_{j,n}$ son revêtement universel.

Notre étape suivante va être de fusionner toutes les surfaces $S_{j,n}$. La procédure est la suivante : pour tout i et n , la construction décrite en 9.3, nous permet précisément de fusionner S_n^{i+} et S_n^{i-} le long de $c_{i,n}$. En procédant de proche en proche, nous produisons ainsi une immersion équivariante cocompacte (f_n, S_n, Γ_n) ayant la propriété suivante : il existe un plongement i_n de D dans S_n tel que $f = f_n \circ i_n$ c'est-à-dire

$$(f, D) \subset (f_n, S_n) \quad [i_n].$$

Par ailleurs les courbes $c_{i,n}$ donnent naissance à des courbes $q_{i,n}$ tracées sur S_n et telles que $i_n(c_i) \subset q_{i,n}$ ainsi que $f_n(q_{i,n}) = c_{i,n}$.

Pour conclure, nous voulons montrer

$$(f, D) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (f_n, S_n) \quad [i_n].$$

Soit donc (g, U) un plongement d'un ouvert U connexe, tel que

$$(g, U) \subset (f_{s(n)}, S_{s(n)}) \quad [j_{s(n)}],$$

et

$$(f, D) \subset (h, U) \quad [j],$$

avec $i_n = j_n \circ j$.

Pour simplifier les notations déjà lourdes, nous allons supposer $s(n) = n$ ce qui est indolore.

Nous supposerons, en considérant j comme une inclusion, que D est un ouvert de U et notons $Z(D)$ la frontière de D dans U . Nous voulons montrer que $Z(D)$ est vide. Raisonnons par l'absurde et supposons que cet ensemble est non vide.

Munissons $\partial_\infty M$ d'une métrique annexe, U , S_n et D des métriques induites. Par notre hypothèse (ix),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{diam}(B_{i,n}^\pm)) = 0,$$

ce qui nous permet de trouver un point x de $Z(D)$ et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall i, n \quad d(g(x), B_{i,n}^\pm) \geq \varepsilon.$$

Nous pouvons également nous assurer que

$$\forall i, \quad d(x, c_i)_{g \circ q} \geq \varepsilon$$

et en particulier, à cause de (xiii)

$$(xv). \quad \forall i, n \quad d(i_n(x), q_i, n) \geq \varepsilon.$$

En prenant ε suffisamment petit, nous pouvons de plus assurer que g est une bijection de la boule B_ε^U de rayon ε de centre x dans U et la boule B_ε de centre $g(x)$ de rayon ε dans $\partial_\infty M$.

Le point x appartient nécessairement à la frontière d'une des composantes D_j de

$$D \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq q} c_i.$$

Rappelons maintenant que S_n est la réunion de copies isométriques des surfaces $S_{j,n}$, bordées par les courbes $q_{i,n}$ qui s'envoient par f_n sur les courbes $c_{i,n}$.

La condition (xv) nous permet d'affirmer que $j_n(B_\varepsilon^U)$ est inclus dans l'intérieur d'une de ces copies de $S_{j,n}$. En particulier, puisque

$$B_\varepsilon = g(B_\varepsilon^U) = f_n \circ j_n(B_\varepsilon^U),$$

nous en déduisons que, pour tout n , $g(B_\varepsilon)$ est inclus dans $\Omega(F_{j,n})$, ce qui est impossible car la limite de Hausdorff des $\Lambda(F_{j,n})$ contient $Fr(D_j)$, et en particulier $g(x)$, par construction.

Ce dernier point est la contradiction recherchée. \diamond

9.6 Démonstration du théorème 9.0.2

Nous pouvons maintenant démontrer la densité des feuilles périodiques dans l'espace laminé \mathcal{M} .

Tout d'abord la proposition 9.5.1 et le lemme 9.1.2 entraîne que l'adhérence de l'ensemble des feuilles périodiques contient l'ensemble des quasi-plongements.

Le théorème 9.0.2 suit alors de la proposition 9.4.1 et de la proposition suivante

Proposition 9.6.1 *Soit (f, D) une donnée asymptotique, soit $\{U\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite emboîtée d'ouvert relativement compacts de D tel que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = D.$$

Notons $\{(\phi_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de solutions des problèmes de Plateau asymptotiques définis par $\{(f, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ et obtenues par le théorème 7.3.2. Nous avons alors les deux résultats suivants :

- (i) *si (f, D) admet une solution (ϕ, D) alors la suite $\{(\phi_n, U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ pointées en l'origine de D converge vers (ϕ, D) .*
- (ii) *si D est le revêtement universel $\partial_\infty M$ auquel on a ôté les deux extrémités d'une géodésique γ , et si f est la projection canonique, alors la suite de surfaces $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, immergées dans UM – où S_n est l'ensemble des vecteurs normaux extérieurs à la surface $\phi_n(U_n)$ – pointées en l'origine de D , converge vers le tube de γ .*

Preuve : démontrons (i) tout d'abord. Nous allons ressasser nos idées habituelles. D'après 7.2.1, pour tout n , $\phi_n(U_n)$ est un graphe d'une fonction f_n au dessus de $\phi(U_n)$. D'après le lemme 7.1.2

$$\forall x \in D, \exists K, \text{ s.t. } \forall n, \quad f_n(x) \leq K.$$

Nos arguments de compacité montre que la suite de fonctions f_n converge alors C^∞ sur tout compact. Le graphe de la limite est alors nécessairement une solution du problème de Plateau asymptotique défini par (f, D) . L'unicité de la solution du problème de Plateau asymptotique, montre que cette fonction limite est nulle et donc (i).

En ce qui concerne (ii), il nous suffit de montrer que quelle que soit la sous-suite $s(n)$, $\{(\phi_{s(n)}, U_{s(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ pointées en l'origine de D ne converge pas vers une k -surface. En effet dans ce cas, la suite $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le tube d'une géodésique d'après 4.1.1, et par construction de D , cette géodésique ne peut être que γ . Or si $\{(\phi_{s(n)}, U_{s(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ pointées en l'origine de D ne convergeait vers une k -surface, celle ci serait une solution du problème de Plateau asymptotique pour $\partial_\infty M$ auquel on ôté un ou deux points et d'après 7.4.1 une telle solution n'existe pas. \diamond

9.6.1 Remarque

Si (f, D) est une donnée asymptotique qui s'étend en un homeomorphisme d'un voisinage du disque fermé dans $\partial_\infty M$, et (ϕ, D) est une k -surface solution du

problème de Plateau asymptotique pour (f, D) , alors (ϕ, D) n'est pas tubulaire à l'infini. En effet, si (ϕ, D) était tubulaire à l'infini, alors il existerait une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $\partial_\infty M$, telle que le cardinal de $f^{-1}(x_n)$ tende vers l'infini.

9.7 Feuilles périodiques de même genre

Nous voulons démontrer le

Proposition 9.7.1 *Soit $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(f_n, S_n, \Gamma_n, \rho_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'immersions équivariantes cocompactes telle que le genre de S_n/Γ_n soit borné. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points telle que $x_n \in S_n$ et que $\{f_n(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ reste dans un compact.*

Supposons que $\{(f_n, S_n, x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(f_\infty, S_\infty, x_\infty)$, nous avons alors les possibilités suivantes :

- (i) *soit il existe Γ_∞ et ρ_∞ telle que $(f_\infty, S_\infty, \Gamma_\infty, \rho_\infty)$ est cocompacte et auquel cas $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang,*
- (ii) *soit (f_∞, S_∞) est dégénérée ou tubulaire à l'infini.*

Remarquons qu'il découle de 9.6.1 et 9.6.1 que l'ensemble des k -surfaces qui ne sont ni dégénérées, ni tubulaires à l'infini est dense dans l'espace \mathcal{N} . Par ailleurs, a cause de l'unicité dans le lemme de Morse, l'ensemble des k -surfaces compactes de même genre est discret. Nous en déduisons un raffinement de 9.0.2 :

Théorème 9.7.2 *Soit $g \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble des feuilles compactes de genre plus grand que g est dense dans \mathcal{N}*

9.7.1 Démonstration de 9.7.1

Montrons tout d'abord la

Proposition 9.7.3 *Soit S une k -surface à courbure moyenne bornée, alors il existe une constante ε strictement positive telle que, pour tout $x \in S$, le rayon d'injectivité de S en x pour la métrique induite de celle de N est minoré par ε*

Preuve : la démonstration est immédiate. La courbure de S étant uniformément bornée, le théorème de compacité 4.1.1 nous assure que S est à géométrie bornée. Le rayon d'injectivité est donc bien uniformément minoré. \diamond

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 9.7.2. D'après l'équation de Gauss, la courbure des métriques sur S_n est coincée entre deux constantes strictement négatives.

Si le diamètre de S_n/Γ_n est uniformément borné, nous en déduisons que S_n/Γ_n converge vers une surface compacte, et que nécessairement la limite de

$$\{(f_n, S_n, \Gamma_n, \rho_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

est une immersion équivariante cocompacte. En particulier, nous en déduisons que $\{(\Gamma_n, \rho_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ devient constante à partir d'un certain rang, et ceci entraîne $\{\Theta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ elle même est constante à partir d'un certain rang, par le lemme de Morse.

Si le diamètre de S_n/Γ_n tend vers l'infini, nous en déduisons que le rayon d'injectivité de S_∞ est nul. Par 9.7.3, la courbure moyenne de f_∞ n'est pas bornée. (f_∞, S_∞) est donc dégénérée ou tubulaire à l'infini. \diamond

10 Généricité des feuilles denses

Nous nous proposons de démontrer

Théorème 10.0.4 *L'ensemble des points de \mathcal{N} par lequel passent des feuilles denses est une intersection dénombrable d'ouverts denses*

Preuve : nous allons en fait démontrer un résultat plus fort. Notons \mathcal{M} l'espace laminé associé à M , c'est-à-dire tel que $\mathcal{N} = \mathcal{M}/\pi_1(N)$, alors, déjà dans \mathcal{M} une feuille générique est dense.

Remarquons tout d'abord que l'espace \mathcal{N} possède une base dénombrable d'ouverts. Pour cela, il suffit de trouver une application continue injective de \mathcal{N} dans un espace à base dénombrable. Notons donc $N(k)$, l'espace des k -jets de plans de N , et $N(\infty)$ la limite projective des $N(k)$. Cet espace est à base dénombrable et l'application naturelle de \mathcal{N} dans $N(\infty)$ est injective, par ellipticité. Nous en déduisons bien sûr que \mathcal{M} est lui aussi à base dénombrable.

Pour conclure, il nous faut donc montrer que si x et y sont deux points de \mathcal{M} , il existe deux suites de points $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tendant respectivement vers x et y , telles que pour tout n , x_n et y_n soient sur la même feuille \mathcal{L}_n .

Nous nous donnons donc deux k -surfaces pointées (f_∞, S, x) et (ϕ_∞, Σ, y) , dans M ; notons f , et ϕ respectivement, leurs applications de Gauss-Minkowski à valeurs dans $\partial_\infty M$.

Soit maintenant $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, et $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des exhaustions de S et Σ par des ouverts relativement compacts, contenant x et y respectivement.

Soit alors (f_n, Σ_n) , et (ϕ_n, Σ_n) , les solutions des problèmes de Plateau asymptotiques définis respectivement par (f, Σ_n) , et (ϕ, Σ_n) .

D'après la proposition 9.6.1, $\{(f_n, \Sigma_n, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, et $\{(\phi_n, \Sigma_n, y)\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergent respectivement vers (f_∞, Σ, x) et (ϕ_∞, Σ, y) .

Par ailleurs, pour tout entier p , nous pouvons construire une famille de données asymptotiques $\{(h_{(p,n)}, U_{(p,n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et des injections $i_{(p,n)}$ et $j_{(p,n)}$ de S_p et Σ_p dans $U_{(p,n)}$ respectivement, telles que l'on ait

$$(f_p, S_p) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (h_{(p,n)}, U_{(p,n)}) \quad [i_{(p,n)}],$$

ainsi que

$$(\phi_p, S_p) = \liminf_{n \in \mathbb{N}} (h_{(p,n)}, U_{(p,n)}) \quad [j_{(p,n)}].$$

Donnons l'esquisse de cette construction, il suffit de rejoindre $f(S_p)$ et $\phi(S_p)$ respectivement par des rubans dont l'épaisseur tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Nous pouvons enfin nous débrouiller pour que, pour tout n et p , le problème de Plateau asymptotique $(h_{(p,n)}, U_{(p,n)})$ possède une solution $(H_{(p,n)}, U_{(p,n)})$.

D'après le lemme 9.1.2, la suite de k -surfaces pointées

$$\{(H_{(p,n)}, U_{(p,n)}, i_{(p,n)}(x))\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers (f_p, S_p, x) , et, respectivement, la suite

$$\{(H_{(p,n)}, U_{(p,n)}, j_{(p,n)}(y))\}_{n \in \mathbb{N}}$$

converge vers (ϕ_p, S_p, y)

Nous pouvons donc trouver une sous-suite $s(n)$ telle que les suites de k -surfaces pointées

$$\{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, i_{(s(n),n)}(x))\}_{n \in \mathbb{N}}$$

et

$$\{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, j_{(s(n),n)}(y))\}_{n \in \mathbb{N}}$$

convergent respectivement vers (f_∞, S, x) et (ϕ_∞, Σ, y) .

En énonçant ceci dans le cadre de \mathcal{N} , les suites de points de \mathcal{N} définies par

$$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, i_{(s(n),n)}(x))\}_{n \in \mathbb{N}}$$

et

$$\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}, j_{(s(n),n)}(y))\}_{n \in \mathbb{N}},$$

convergent vers $X = (f_\infty, S, x)$ et $Y = (\phi_\infty, \Sigma, y)$. Par ailleurs, pour tout n , X_n et Y_n appartiennent à la même feuille \mathcal{L}_n , définie par

$$\mathcal{L}_n = (H_{(s(n),n)}, U_{(s(n),n)}).$$

C'est ce que nous voulions démontrer. \diamond

11 Stabilité

Notre but dans cette section est de démontrer un analogue du théorème de stabilité pour le flot géodésique des variétés à courbure strictement négative :

Théorème 11.0.5 *Soit N une variété compacte de dimension 3, si g est une métrique à courbure strictement plus petite que -1 , et $k \in]0, 1[$, nous noterons \mathcal{N}_g^k , son espace des k -surfaces convexes.*

Si k et l appartiennent à $]0, 1[$, si g et h sont deux métriques appartenant à la même composante connexe de l'espace des métriques à courbure plus petite que -1 , il existe alors un homéomorphisme Φ de \mathcal{N}_g^k dans \mathcal{N}_h^l envoyant feuille sur feuille.

11.1 Un lemme

Nous voulons montrer le

Lemme 11.1.1 *Soit g une métrique à courbure strictement négative sur N et c une constante strictement positive, il existe un voisinage U de g pour la topologie C^∞ tel que, $\forall h, \bar{h} \in U$, pour toute surface immergée complète à géométrie bornée (f, S) dont les courbures principales (pour la métrique g) sont plus grandes que c , si (f, S) est horosphérique à l'infini pour h , alors (f, S) est horosphérique à l'infini pour \bar{h} .*

Preuve : on peut choisir U pour que (f, S) ait une courbure plus grande que $c^2/4$ pour toutes les métriques de U , et, en particulier, soit une surface convexe.

Pour montrer le lemme, remarquons qu'il nous suffit de montrer que si (f, S) est horosphérique pour h , alors (f, S) est horosphérique à l'infini pour \bar{h} . Or si, (f, S) est horosphérique, elle (ou plus exactement son image inverse dans le revêtement universel) borde un ensemble convexe ayant exactement un point à l'infini. Le bord à l'infini étant un invariant de quasi-isométrie, nous en déduisons que le convexe bordé par (f, S) à lui aussi un seul point à l'infini pour \bar{h} .

La surface (f, S) est donc une pseudo-horosphère pour la métrique g et par le lemme 2.4.1, elle est horosphérique à l'infini pour \bar{h} . \diamond

11.1.1 Démonstration du théorème 11.0.5

Il nous suffit bien sûr de montrer le théorème pour deux métriques \bar{h} et h suffisamment proches au sens C^∞ . Nous allons les prendre dans un ouvert U donné par lemme précédent pour une constante c adéquate.

Soit tout $\mathcal{L} = (f, S)$ une feuille de \mathcal{N}_h^k . Nous voyons ici (f, S) comme une immersion de S dans UN le fibré unitaire de N . Notons alors f_R l'application de S dans N , donnée par

$$f_R : s \mapsto \exp(Rf(s)).$$

Nous savons (cf corollaire 3.1.2), que, pour R choisi suffisamment grand indépendamment de S , chacune des courbures principales de f_R est plus grande qu'une constante c , avec $c > l^{1/2}$,

Nous en déduisons que si h est une métrique suffisamment proche de \bar{h} , l'immersion (f_R, S) est pour cette métrique h à courbure plus grande que l .

Nous sommes en mesure de construire notre homéomorphisme Φ . Séparons en deux cas,

(i) Si (f, S) est un tube alors, par le lemme de Morse pour les géodésiques, (f_R, S) est tubulaire pour la métrique h , soit γ la géodésique correspondante et T son tube. Nous avons donc une projection radiale naturelle π de $f_R(S)$ sur T . Nous posons alors si $x \in S$

$$\Phi(f, S, x) = (T, \pi \circ f_R(x)),$$

où nous voyons maintenant (f, S, x) , *resp.* $(T, \pi \circ f_R(x))$, comme un point de \mathcal{N}_h^k , *resp.* de \mathcal{N}_h^l .

(ii) Si (f, S) n'est pas un tube, (f_R, S) n'est pas tubulaire pour h (par le lemme de Morse pour les géodésiques). De plus, par le lemme 11.1.1 (f_R, S) n'est pas horosphérique à l'infini. Notre lemme de Morse pour les surfaces convexes 6.0.2, nous permet alors de construire une l -surface lentille pour la métrique h , (\bar{f}, \bar{S}) pour (f_R, S) . Enfin, notons π la projection qui a tout point de (f_R, S) associe son pied sur (\bar{f}, \bar{S}) . Nous pouvons alors définir

$$\Phi(f, S, x) = (\bar{f}, \bar{S}, \pi \circ f_R(x)).$$

A nouveau, nous voyons (f, S, x) , *resp.* $(\bar{f}, \bar{S}, \pi \circ f_R(x))$, comme un point de \mathcal{N}_h^k , *resp.* de \mathcal{N}_h^l .

Par construction, Φ envoie feuille sur feuille. La continuité de Φ provient de 4.0.1.

Pour démontrer, que Φ est une bijection, remarquons tout d'abord que Φ envoie bijectivement chaque feuille sur chaque feuille. Soit maintenant $\bar{\Phi}$ l'application obtenue en inversant les rôles de h et \bar{h} . L'unicité dans le lemme de Morse permet de montrer $\Phi \circ \bar{\Phi}$ envoie chaque feuille dans elle même. L'application $\Phi \circ \bar{\Phi}$ est donc une bijection, ce qui entraîne que Φ elle-même est une bijection. \diamond

Références

- [1] M. Anderson *The Dirichlet Problem at infinity for manifolds of negative curvature* J. Differ. Geom. **18**, 701-722 (1983)
- [2] M. Gromov *Foliated Plateau Problem I* G.A.F.A. **1**, 14-79 (1991)
- [3] F. Labourie *Equations de Monge-Ampère, courbes holomorphes et laminations* G.A.F.A. **7**, 496-534 (1997)
- [4] F. Labourie *Surfaces convexes dans l'espace hyperbolique et \mathbb{CP}^1 -structures* Jour. Lond. Mat. Soc. **111**, 549-565 (1992)
- [5] H. Rosenberg, J. Spruck *On the existence of convex hypersurfaces of constant Gauss curvature in hyperbolic space* J. Differ. Geom. **40-2**, 379-409 (1994).